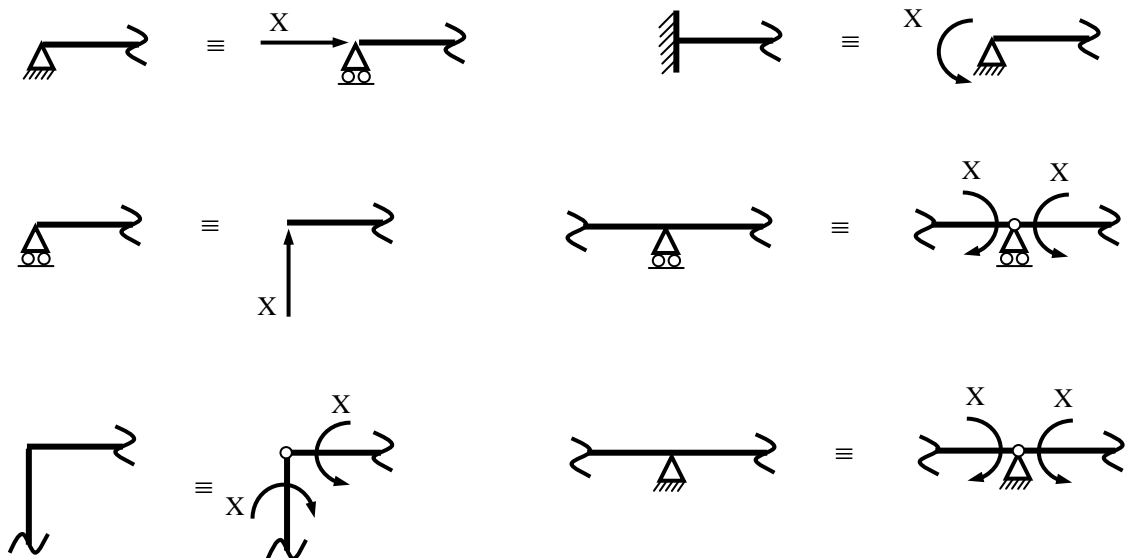


## ➤ MÉTODO DOS ESFORÇOS

Na resolução de estruturas hiperestáticas (aquelas que não podem ser resolvidas com as 3 equações fundamentais da estática, a saber: somatória forças verticais igual a zero, somatória forças horizontais igual a zero, somatória momento fletor referente a um ponto igual a zero), nós podemos lançar mão do método dos esforços. Este processo de cálculo consiste na utilização de uma estrutura equivalente a que desejamos calcular, na qual substituímos um vínculo entre barras ou entre barra e apoio por um carregamento externo. Vejamos alguns exemplos de modificação abaixo:



A estrutura equivalente deve ser isostática, caso a estrutura continue hiperestática após a primeira modificação, executamos outra modificação e assim por diante até encontrar uma estrutura equivalente isostática. A estrutura equivalente deve ser desdobrada em:

**ISOSTÁTICA BÁSICA** – corresponde a estrutura equivalente com os carregamentos externos da viga original.

**CASO (1)** – corresponde a estrutura equivalente com o carregamento originado pela primeira modificação.

**CASO (2)** – corresponde a estrutura equivalente com o carregamento originado pela segunda modificação.

**CASO (n)** – corresponde a estrutura equivalente com o carregamento originado pela  $n$ ésima modificação.

Vale um comentário quanto a numeração da estrutura: deve-se procurar numerar os nós da estrutura de forma que o ponto 1 coincida com a modificação 1, o ponto 2 com a modificação 2 e assim por diante, e, caso seja possível, desaconselha-se duas modificações no mesmo nó.

Para conseguirmos determinar as incógnitas que superam o número de equações fundamentais da Estática vamos usar equações de compatibilidade de deformação (seja esta deformação a flecha, o giro, ou o giro relativo). Ou seja, valendo a sobreposição de efeitos:

- na modificação do apoio móvel do nó "1" por uma força "X", temos que a soma da flecha devida ao carregamento externo original com a flecha devida a força "X" será igual a zero (condição de apoio na estrutura original).

$$\delta_{1R} = \delta_{10} + \delta_{11} \rightarrow 0 = \delta_{10} + \delta_{11}$$

- na modificação do engastamento do nó "1" por um momento fletor "X" e um apoio fixo, temos que a soma do giro devido ao carregamento externo original com o giro devido ao momento "X" será igual a zero (condição de engastamento na estrutura original).

$$\varphi_{1R} = \varphi_{10} + \varphi_{11} \rightarrow 0 = \varphi_{10} + \varphi_{11}$$

- na modificação da ligação rígida entre barras no nó "1" por uma articulação com momentos fletores relativos "X", diremos que a soma do giro relativo devido ao carregamento externo original com o giro relativo devido aos momentos fletores relativos "X" será igual a zero (condição de ligação rígida - continuidade - na estrutura original).

$$\varphi_{R1R} = \varphi_{R10} + \varphi_{R11} \rightarrow 0 = \varphi_{R10} + \varphi_{R11}$$

Os cálculos relativos a flecha, giro e giro relativo serão desenvolvidos com o Teorema de Castigliano e auxílio da Tabela de Kurt Beyer. Para tanto devemos construir os diagramas de momento fletor da Isostática Básica e dos "n" Casos. Uma vez que o Teorema de Castigliano utiliza de um diagrama de momento gerado por um carregamento unitário, convém em cada Caso ("n") colocarmos em evidência  $X_n$  tornando assim cada Caso ("n") em um carregamento unitário multiplicado por  $X_n$ .

Cria-se a equação de compatibilidade na seguinte forma:

$$\text{REAL} = \text{CASO (0)} + X_1 \cdot \text{CASO (1)} + X_2 \cdot \text{CASO (2)} + \dots + X_n \cdot \text{CASO (n)}$$

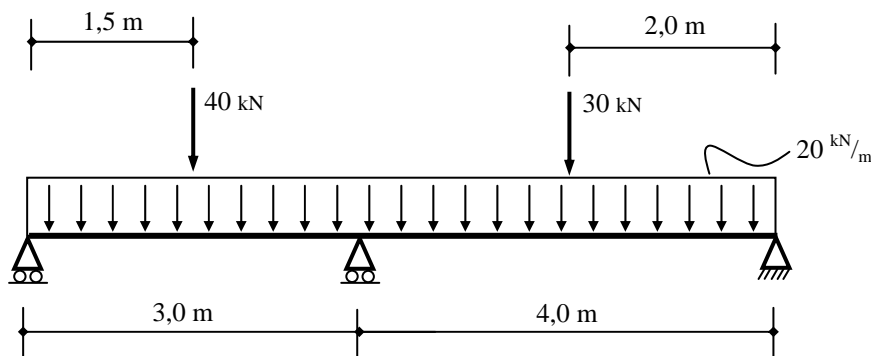
$$\text{Castigliano: } \delta = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx, \quad \varphi = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx, \quad \varphi_R = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx$$

Encontradas as deformações por Castigliano, montamos um sistema linear devido as equações de compatibilidade com a seguinte forma:

$$\begin{cases} \varphi_{1R} = \varphi_{10} + X_1 \cdot \varphi_{11} + X_2 \cdot \varphi_{12} + \dots + X_n \cdot \varphi_{1n} \\ \varphi_{2R} = \varphi_{20} + X_1 \cdot \varphi_{21} + X_2 \cdot \varphi_{22} + \dots + X_n \cdot \varphi_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \varphi_{nR} = \varphi_{n0} + X_1 \cdot \varphi_{n1} + X_2 \cdot \varphi_{n2} + \dots + X_n \cdot \varphi_{nn} \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = \varphi_{10} + X_1 \cdot \varphi_{11} + X_2 \cdot \varphi_{12} + \dots + X_n \cdot \varphi_{1n} \\ 0 = \varphi_{20} + X_1 \cdot \varphi_{21} + X_2 \cdot \varphi_{22} + \dots + X_n \cdot \varphi_{2n} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ 0 = \varphi_{n0} + X_1 \cdot \varphi_{n1} + X_2 \cdot \varphi_{n2} + \dots + X_n \cdot \varphi_{nn} \end{cases}$$

Os valores encontrados nos fornecem os vínculos ou esforços internos aos quais se referem, tornando possível agora a resolução da estrutura original utilizando-se as 3 equações fundamentais da estática, seguindo o cálculo das reações de apoio e a construção dos diagramas de esforços internos solicitantes da estrutura original, a saber N (esforço normal) , V (esforço cortante) e M (momento fletor) .

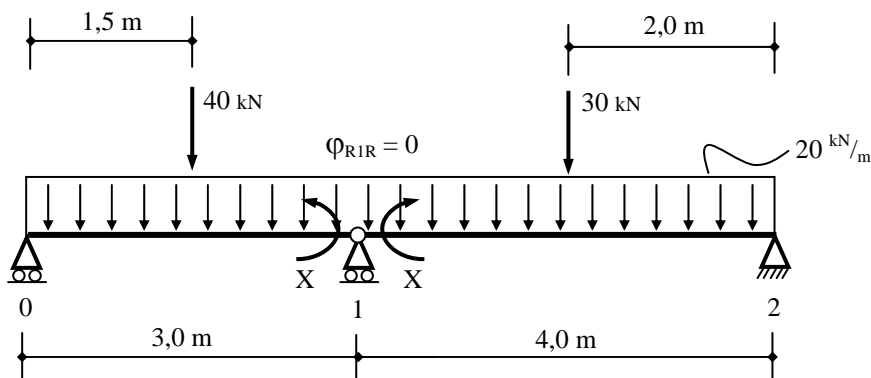
**EXERCÍCIO 01 :** Na viga contínua esquematizada abaixo , calcular os diagramas de esforços internos solicitantes :



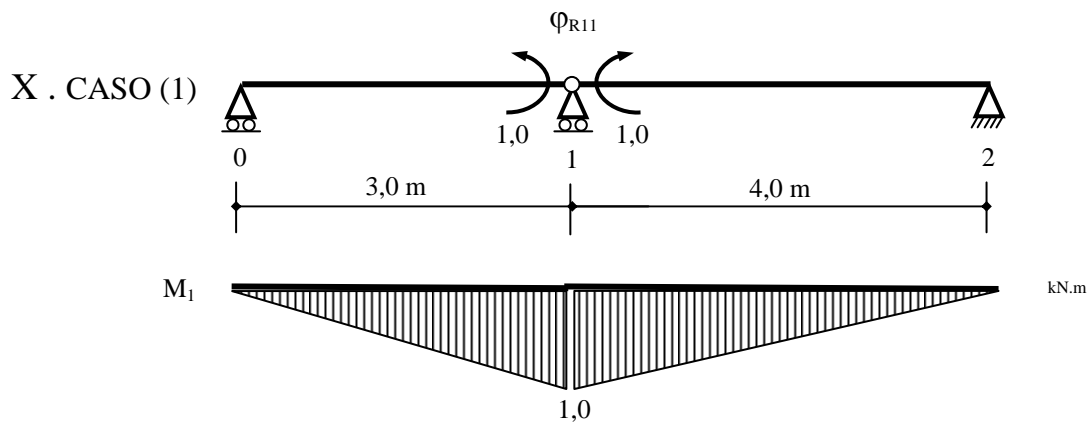
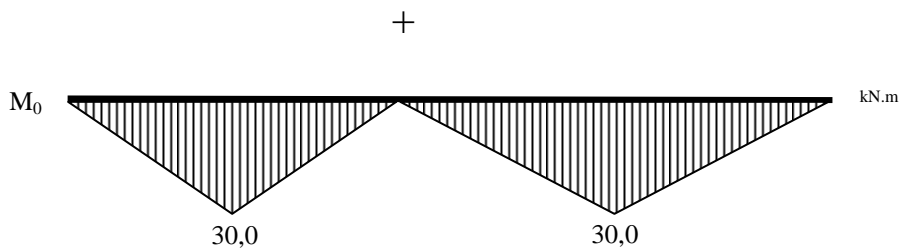
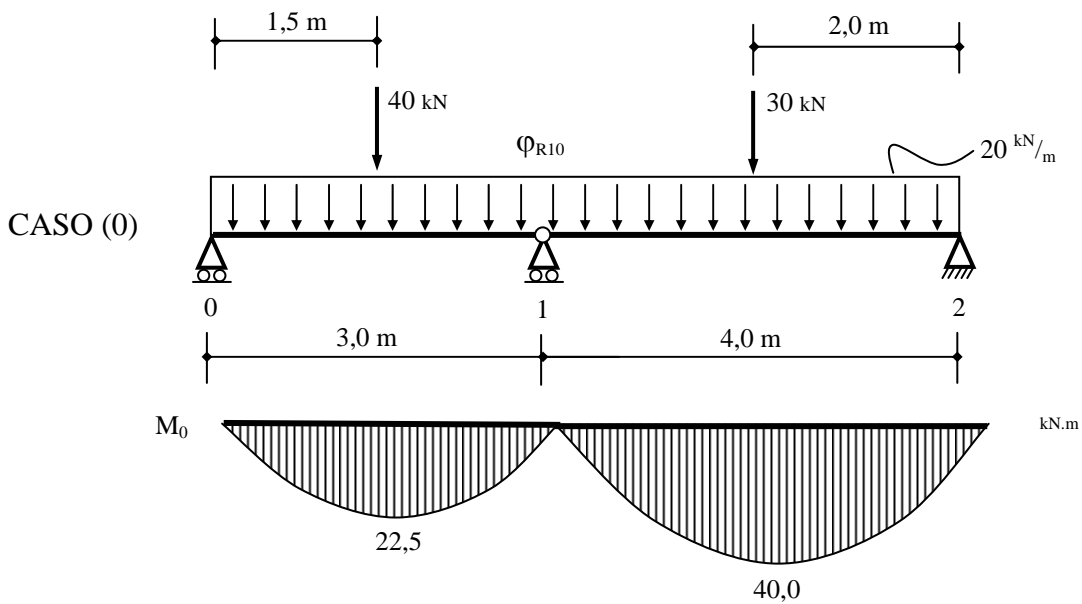
E , I → constantes

Resolução :

- Definição da viga equivalente e numeração da estrutura (Caso Real) :



- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :



- Cálculo dos giros relativos  $\varphi_{R10}$  ,  $\varphi_{R11}$  por Castigliano :

$$\varphi_{R10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx$$

$$\varphi_{R10} = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \left( \frac{s \cdot i \cdot k}{3} + \frac{s \cdot i \cdot k}{3} + \frac{s \cdot i \cdot k}{6} \cdot (1 + \alpha) + \frac{s \cdot i \cdot k}{6} \cdot (1 + \beta) \right)$$

$$\varphi_{R10} = \frac{1}{E.I} \left( \frac{3.22,5.1}{3} + \frac{4.40.1}{3} + \frac{3.30.1}{6} \cdot (1+0,5) + \frac{4.30.1}{6} \cdot (1+0,5) \right) = + \frac{385}{3.E.I}$$

$$\varphi_{R11} = \int \frac{M_1.M_1}{E.I} .dx$$

$$\varphi_{R10} = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1.M_1 .dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.1.1}{3} + \frac{4.1.1}{3} \right) = + \frac{7}{3.E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X \cdot (1) \Rightarrow \varphi_{R1R} = \varphi_{R10} + X \cdot \varphi_{R11}$$

$$0 = + \frac{385}{3.E.I} + X \cdot \frac{7}{3.E.I} \Rightarrow X = - \frac{385}{3.E.I} \cdot \frac{3.E.I}{7} = -55,00$$

∴ podemos assim afirmar que o momento fletor no apoio (1) assume o valor  $X \cdot 1,0 \text{ kN.m}$ , ou seja, vale  $-55,00 \text{ kN.m}$ . O sinal negativo indica que ele assume sentido contrário ao escolhido na proposição do caso (1).

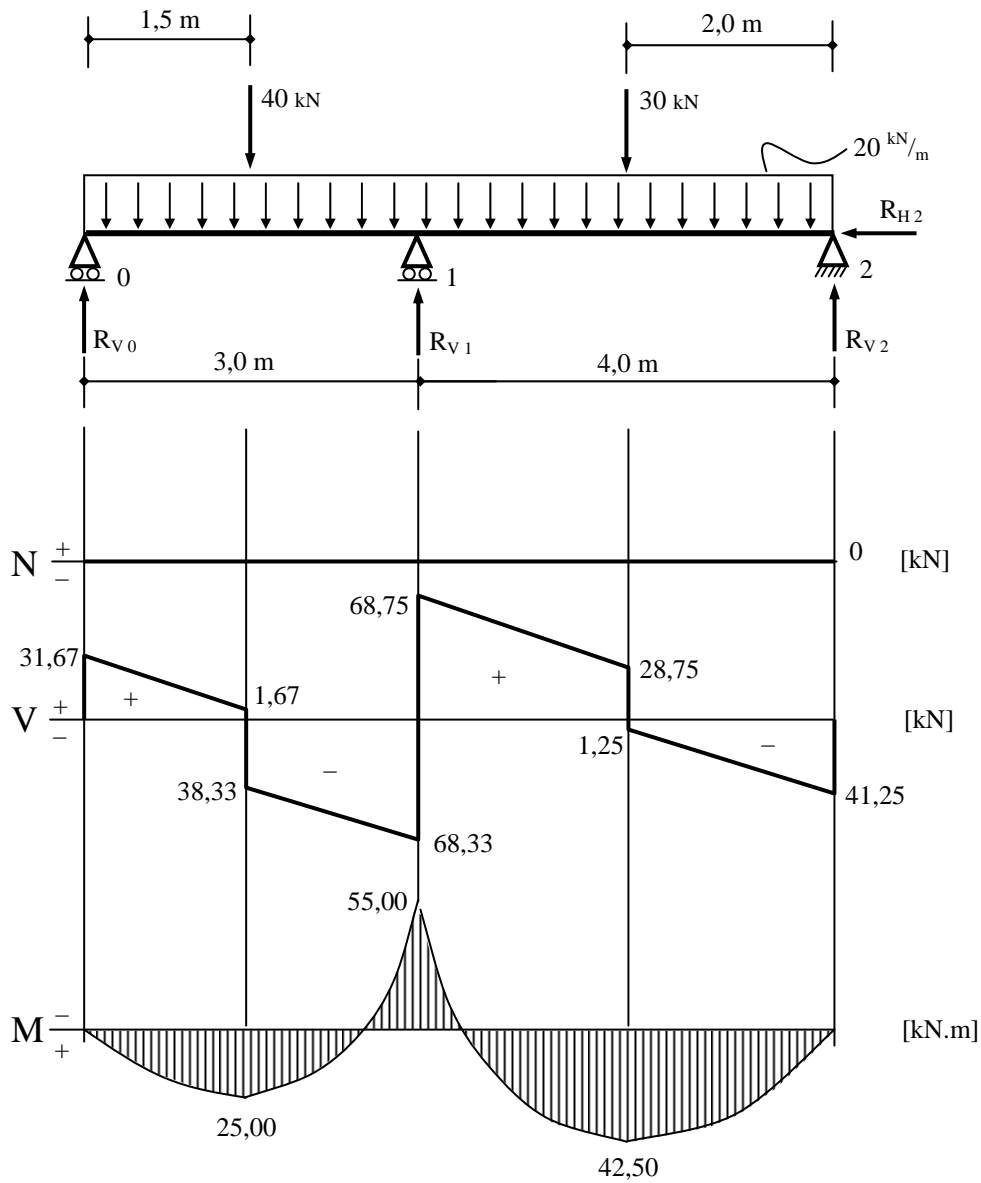
- Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

$$\sum M_{esq1} = -55,00 \Rightarrow -55 = +R_{V0} \cdot 3 - 40 \cdot 1,5 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \Rightarrow R_{V0} = +31,67 \text{ kN}$$

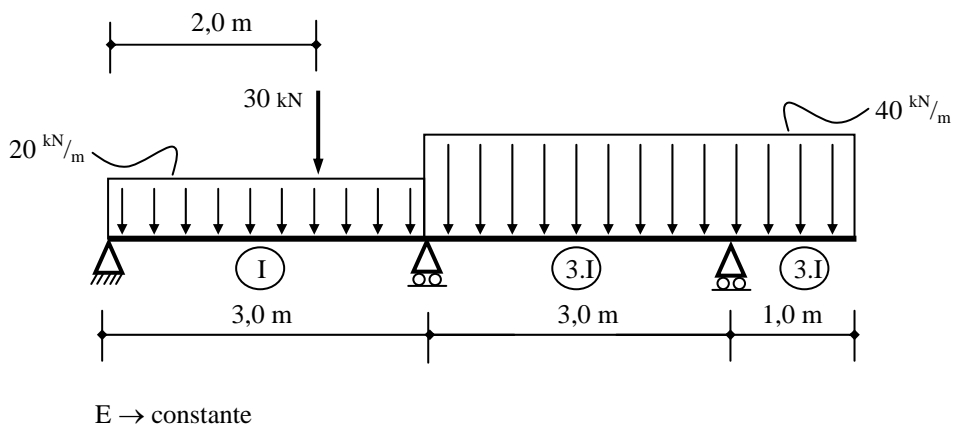
$$\sum M_{dir1} = -55,00 \Rightarrow -55 = +R_{V2} \cdot 4 - 30 \cdot 2 - 20 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow R_{V2} = +41,25 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow +R_{V0} + R_{V1} + R_{V2} - 40 - 30 - 7 \cdot 20 = 0 \Rightarrow R_{V1} = +137,08 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{H2} = 0$$

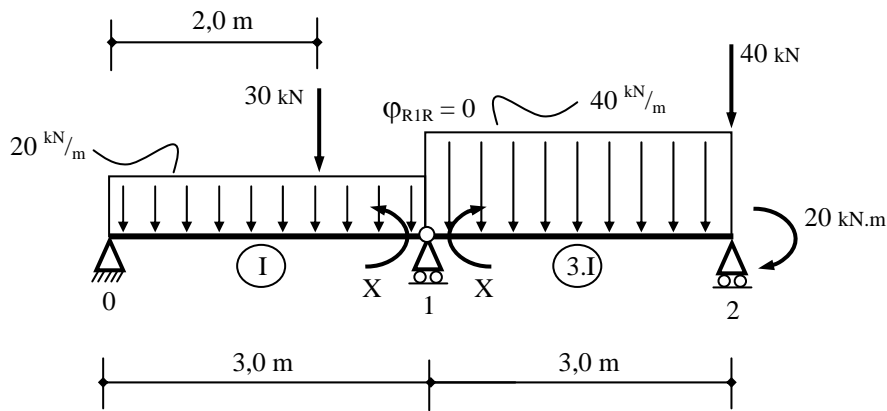


EXERCÍCIO 02 : Na viga contínua esquematizada abaixo , calcular os diagramas de esforços internos solicitantes :

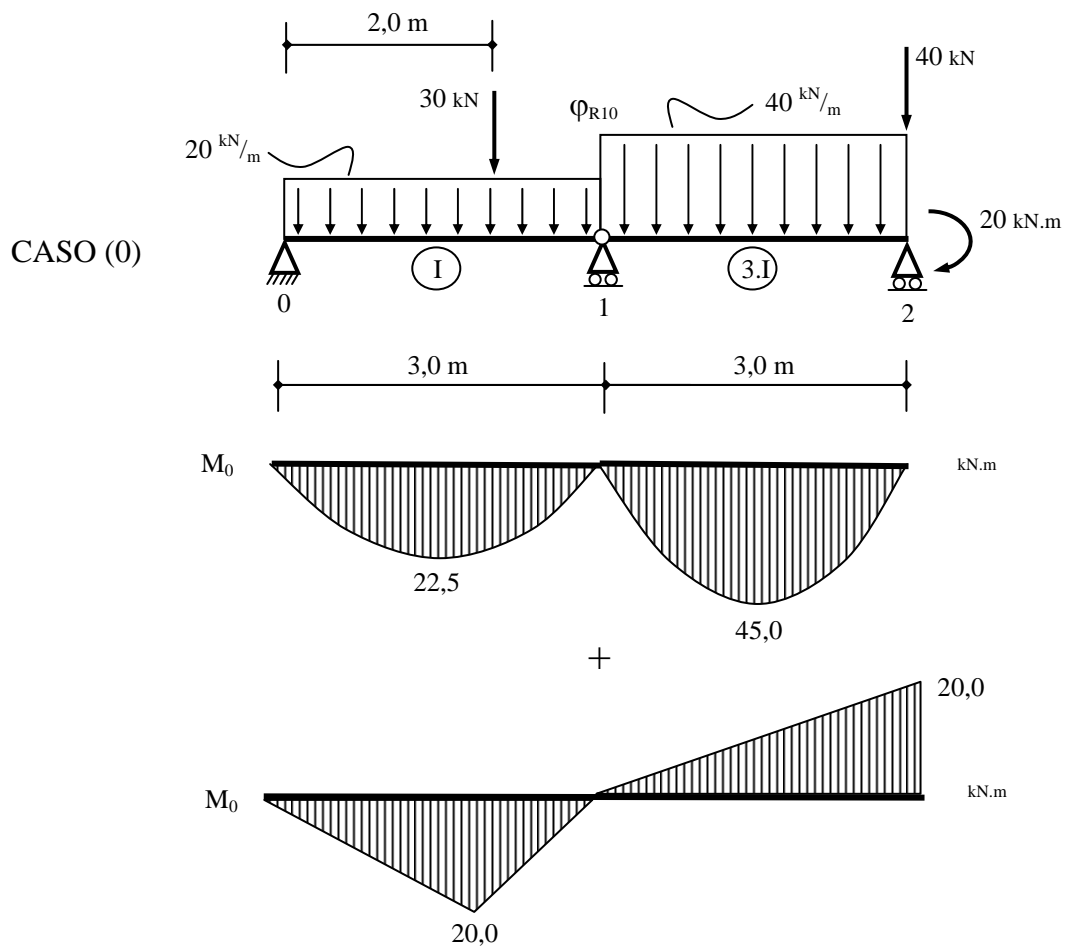


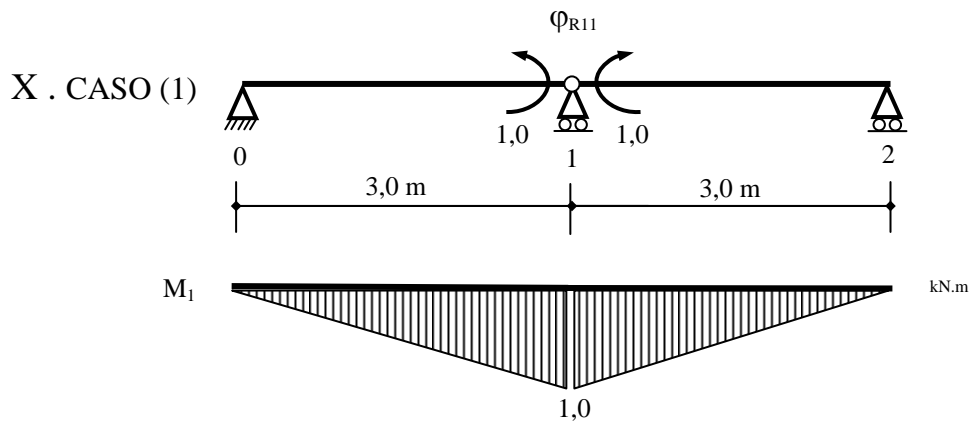
Resolução :

- Definição da viga equivalente e numeração da estrutura (Caso Real) :



- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :





- Cálculo dos giros relativos  $\varphi_{R10}$ ,  $\varphi_{R11}$  por Castigliano :

$$\varphi_{R10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \int_0^1 \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx + \int_1^2 \frac{M_0 \cdot M_1}{3.E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int_0^1 M_0 \cdot M_1 \cdot dx + \frac{1}{3.E.I} \cdot \int_1^2 M_0 \cdot M_1 \cdot dx$$

$$\varphi_{R10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{6} \cdot (1 + \alpha) \right) + \frac{1}{3.E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{6} \right)$$

$$\varphi_{R10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.22,5.1}{3} + \frac{3.1.20}{6} \cdot \left( 1 + \frac{2}{3} \right) \right) + \frac{1}{3.E.I} \cdot \left( \frac{3.45.1}{3} - \frac{3.1.20}{6} \right) = + \frac{305}{6.E.I}$$

$$\varphi_{R11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \int_0^1 \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx + \int_1^2 \frac{M_1 \cdot M_1}{3.E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int_0^1 M_1 \cdot M_1 \cdot dx + \frac{1}{3.E.I} \cdot \int_1^2 M_1 \cdot M_1 \cdot dx$$

$$\varphi_{R11} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) + \frac{1}{3.E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.1.1}{3} \right) + \frac{1}{3.E.I} \cdot \left( \frac{3.1.1}{3} \right) = + \frac{4}{3.E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X \cdot (1) \Rightarrow \varphi_{R1R} = \varphi_{R10} + X \cdot \varphi_{R11}$$

$$0 = + \frac{305}{6.E.I} + X \cdot \frac{4}{3.E.I} \Rightarrow X = - \frac{305}{6.E.I} \cdot \frac{3.E.I}{4} = -38,12$$

∴ podemos assim afirmar que o momento fletor no apoio (1) assume o valor  $X \cdot 1,0$  kN.m , ou seja, vale  $-38,12$  kN.m . O sinal negativo indica que ele assume sentido contrário ao escolhido na proposição do caso (1) .

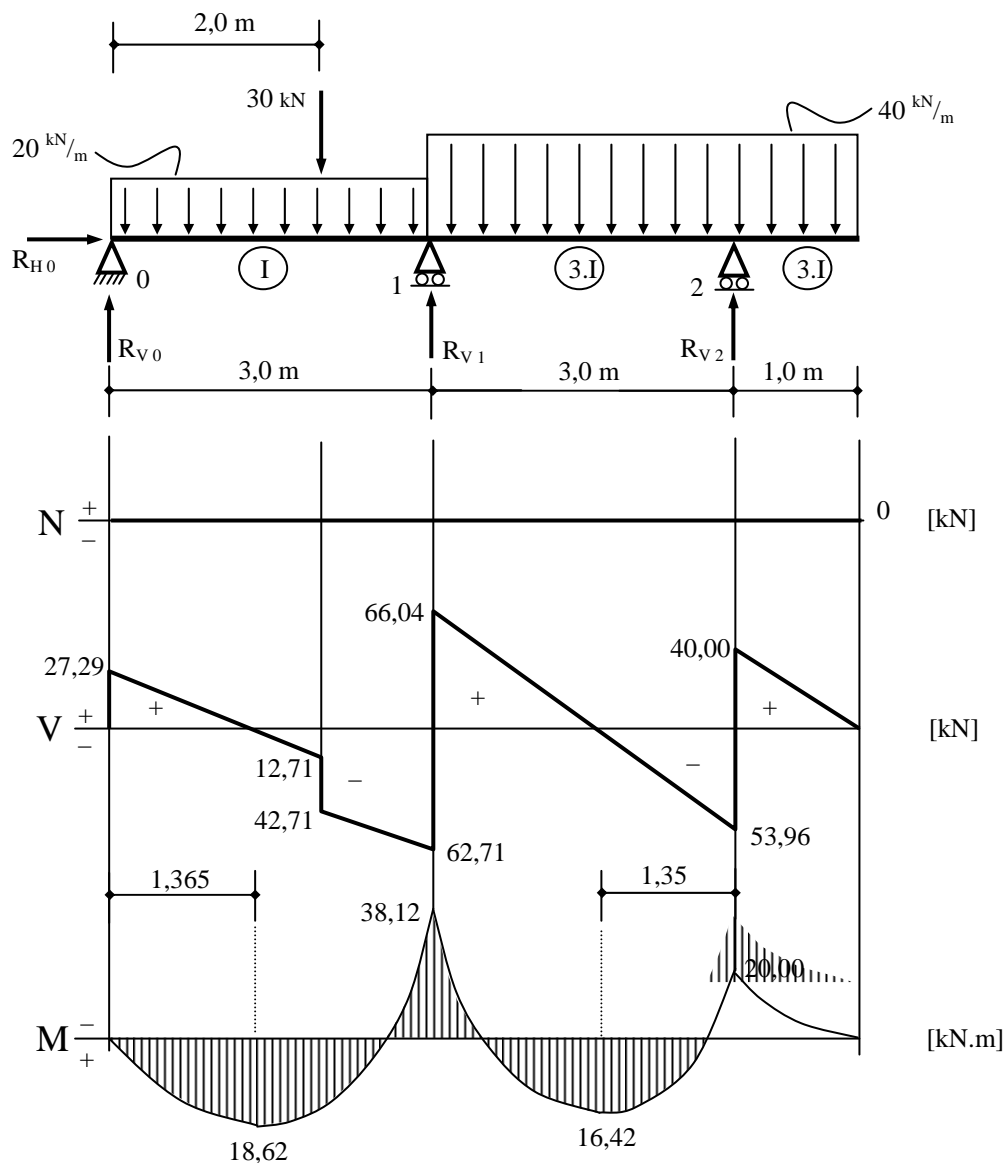
- Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

$$\sum M_{esq1} = -38,12 \Rightarrow -38,12 = +R_{V0} \cdot 3 - 30 \cdot 1 - 20 \cdot 3 \cdot 1,5 \Rightarrow R_{V0} = +27,29 \text{ kN}$$

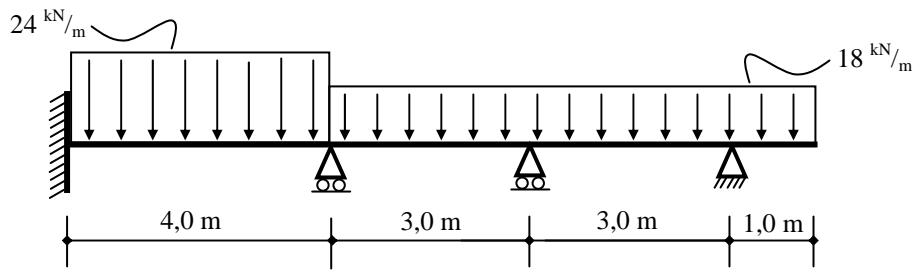
$$\sum M_{dir1} = -38,12 \Rightarrow -38,12 = +R_{V2} \cdot 3 - 40 \cdot 4,2 \Rightarrow R_{V2} = +93,96 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow +R_{V0} + R_{V1} + R_{V2} - 30 - 3 \cdot 20 - 4 \cdot 40 = 0 \Rightarrow R_{V1} = +128,75 \text{ kN}$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{H0} = 0$$



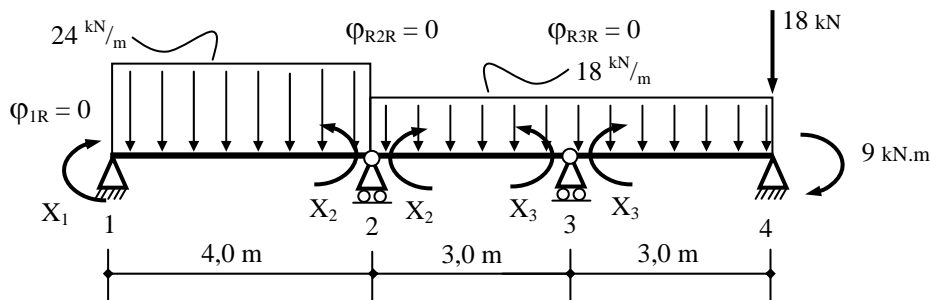
**EXERCÍCIO 03 :** Na viga contínua esquematizada abaixo , calcular os diagramas de esforços internos solicitantes :



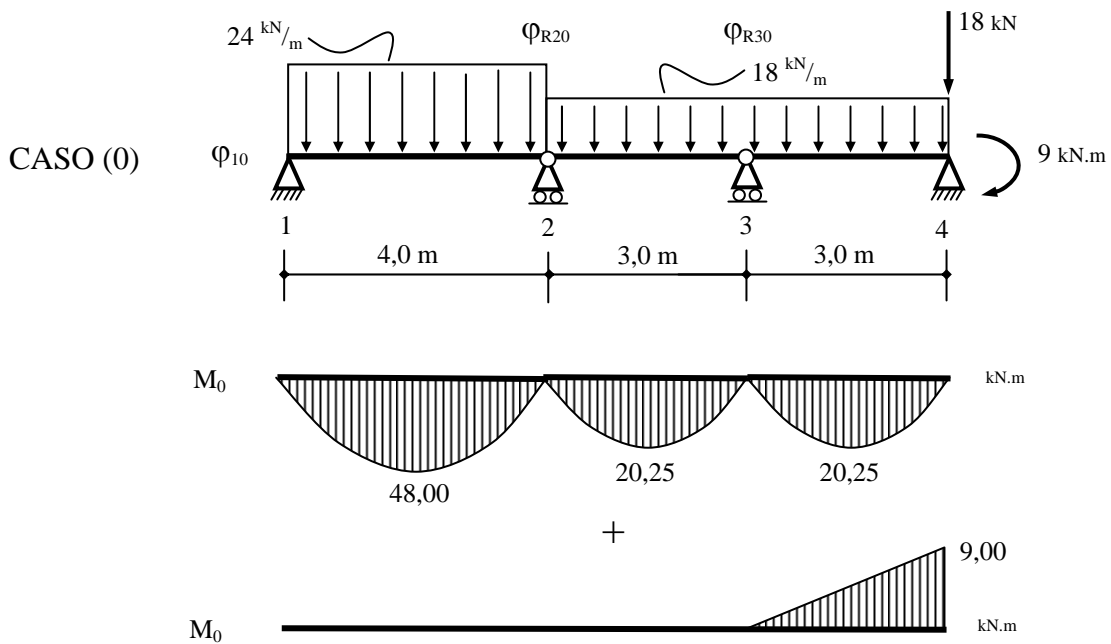
$E, I \rightarrow$  constantes

Resolução :

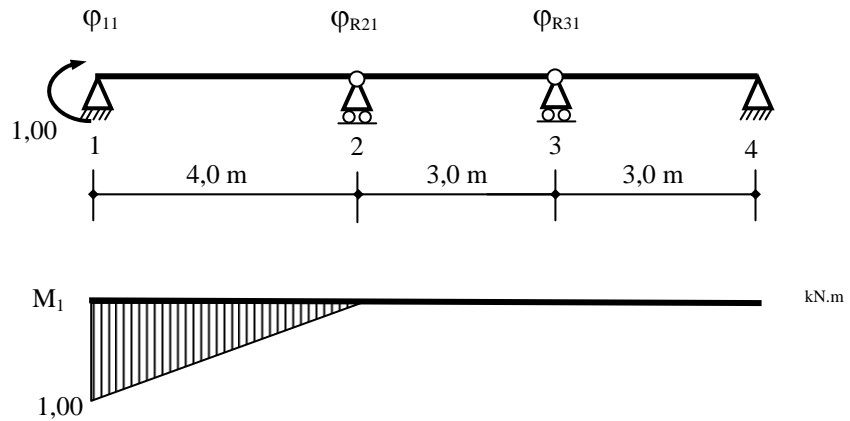
- Definição da viga equivalente e numeração da estrutura (Caso Real) :



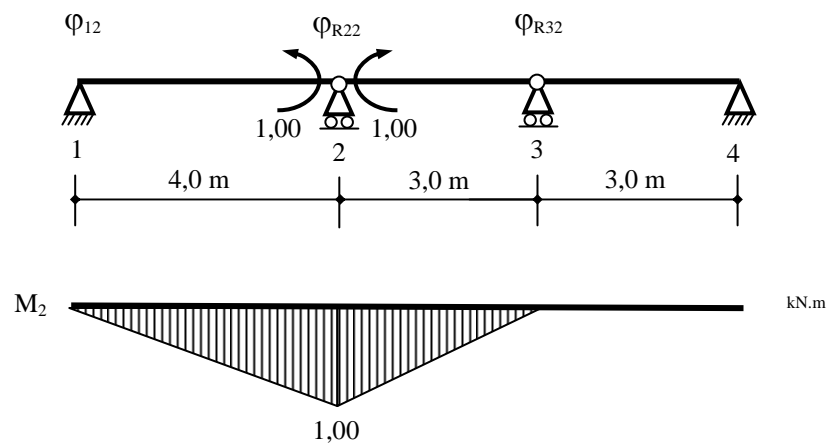
- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :



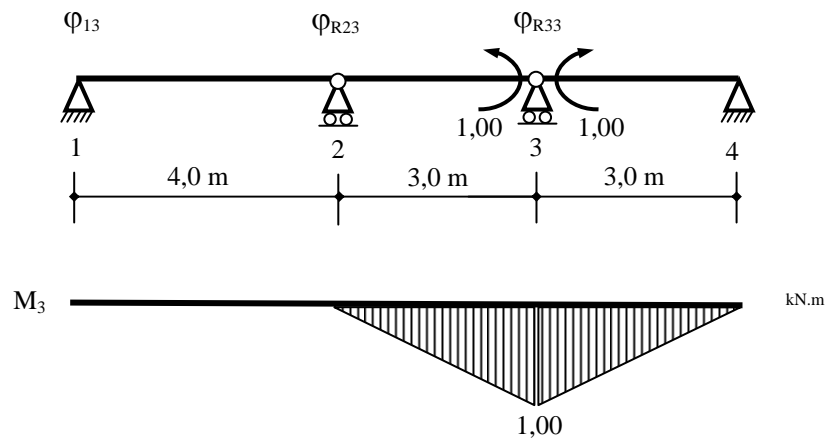
X<sub>1</sub> . CASO (1)



X<sub>2</sub> . CASO (2)



X<sub>3</sub> . CASO (3)



- Cálculo dos giros relativos  $\varphi_{R20}$ ,  $\varphi_{R30}$ ,  $\varphi_{R21}$ ,  $\varphi_{R22}$ ,  $\varphi_{R23}$ ,  $\varphi_{R31}$ ,  $\varphi_{R32}$ ,  $\varphi_{R33}$ , e dos giros  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$ ,  $\varphi_{13}$ , por Castigliano :

$$\varphi_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4 \cdot 48 \cdot 1}{3} \right) = + \frac{64}{E.I}$$

$$\varphi_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{3} \right) = + \frac{4}{3 \cdot E.I}$$

$$\varphi_{12} = \varphi_{R21} = \int \frac{M_1 \cdot M_2}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_2 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{6} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4.1.1}{6} \right) = + \frac{2}{3.E.I}$$

$$\varphi_{13} = \varphi_{R31} = \int \frac{M_1 \cdot M_3}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_3 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot 0 = 0$$

$$\varphi_{R20} = \int \frac{M_0 \cdot M_2}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_2 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4.48.1}{3} + \frac{3.20,25.1}{3} \right)$$

$$\varphi_{R20} = + \frac{337}{4.E.I}$$

$$\varphi_{R22} = \int \frac{M_2 \cdot M_2}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_2 \cdot M_2 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4.1.1}{3} + \frac{3.1.1}{3} \right) = + \frac{7}{3.E.I}$$

$$\varphi_{R23} = \varphi_{R32} = \int \frac{M_2 \cdot M_3}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_2 \cdot M_3 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{6} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.1.1}{6} \right) = + \frac{1}{2.E.I}$$

$$\varphi_{R30} = \int \frac{M_0 \cdot M_3}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_3 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{6} \right)$$

$$\varphi_{R30} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.20,25.1}{3} + \frac{3.20,25.1}{3} - \frac{3.9.1}{6} \right) = \frac{36}{E.I}$$

$$\varphi_{R33} = \int \frac{M_3 \cdot M_3}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_3 \cdot M_3 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{3.1.1}{3} + \frac{3.1.1}{3} \right) = + \frac{2}{E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X_1 \cdot (1) + X_2 \cdot (2) + X_3 \cdot (3) \Rightarrow \begin{cases} 0 = \varphi_{10} + X_1 \cdot \varphi_{11} + X_2 \cdot \varphi_{12} + X_3 \cdot \varphi_{13} \\ 0 = \varphi_{R20} + X_1 \cdot \varphi_{R21} + X_2 \cdot \varphi_{R22} + X_3 \cdot \varphi_{R23} \\ 0 = \varphi_{R30} + X_1 \cdot \varphi_{R31} + X_2 \cdot \varphi_{R32} + X_3 \cdot \varphi_{R33} \end{cases}$$

resolvendo o sistema por forma matricial :

$$\begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} \\ \varphi_{R21} & \varphi_{R22} & \varphi_{R23} \\ \varphi_{R31} & \varphi_{R32} & \varphi_{R33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\varphi_{10} \\ -\varphi_{R20} \\ -\varphi_{R30} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1,33 & 0,67 & 0 \\ 0,67 & 2,33 & 0,50 \\ 0 & 0,50 & 2,00 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -64,00 \\ -84,25 \\ -36,00 \end{bmatrix}$$

$$X_1 = -36,47$$

$$\therefore X_2 = -23,07$$

$$X_3 = -12,23$$

$\therefore$  podemos assim afirmar que : o momento reativo no engaste (1) assume o valor  $X_1$  . 1,0 kN.m , ou seja, vale  $-36,47$  kN.m ; o momento fletor no apoio (2) assume o valor  $X_2$  . 1,0 kN.m , ou seja,

vale  $-23,07$  kN.m ; o momento fletor no apoio (3) assume o valor  $X_3 \cdot 1,0$  kN.m , ou seja, vale  $-12,23$  kN.m . O sinal negativo indica que os momentos assumem sentido contrário ao escolhido na proposição dos casos .

▪ Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

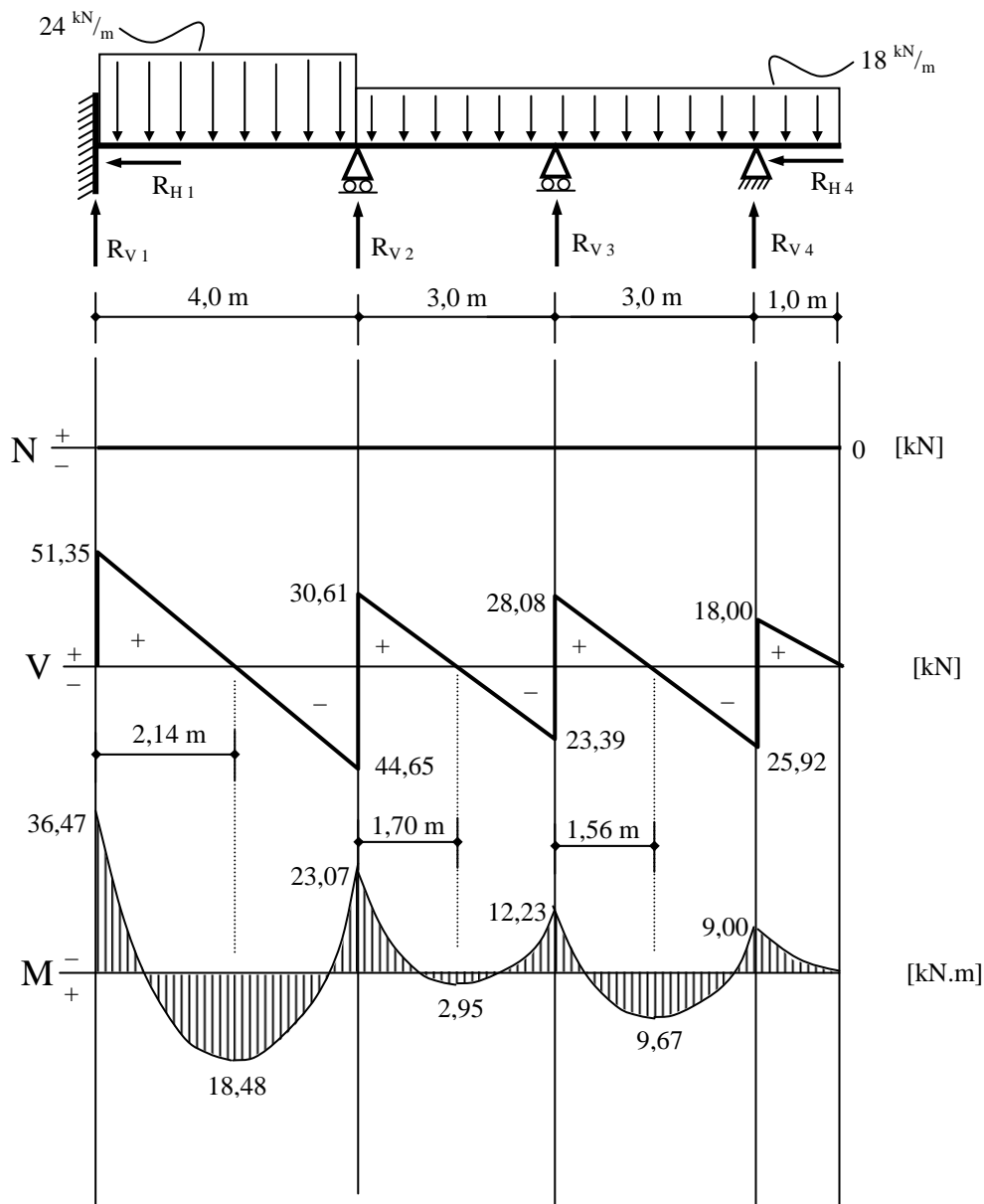
$$\sum M_{esq2} = -23,07 \Rightarrow -23,07 = -36,47 + R_{V1} \cdot 4 - 24 \cdot 4 \cdot 2 \Rightarrow R_{V1} = +51,35kN$$

$$\sum M_{esq3} = -12,23 \Rightarrow -12,23 = -36,47 + 51,35 \cdot 7 - 24 \cdot 4 \cdot 2 + R_{V2} \cdot 3 - 18 \cdot 3 \cdot 1,5 \Rightarrow R_{V2} = +75,26kN$$

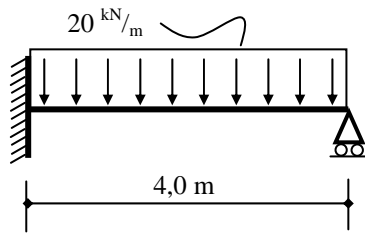
$$\sum M_{dir3} = -12,23 \Rightarrow -12,23 = -18 \cdot 4 \cdot 2 + R_{V4} \cdot 3 \Rightarrow R_{V4} = +43,92kN$$

$$\sum M_{dir2} = -23,07 \Rightarrow -23,07 = -18 \cdot 7 \cdot 3,5 + 43,92 \cdot 6 + R_{V3} \cdot 3 \Rightarrow R_{V3} = +51,47kN$$

$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{H1} = 0 \quad ; \quad R_{H4} = 0$$



**EXERCÍCIO 04 :** Na viga hiperestática esquematizada abaixo , calcular os diagramas de esforços internos solicitantes :

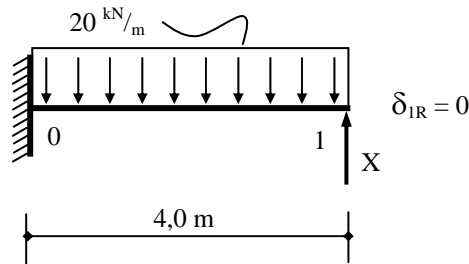


$E, I \rightarrow$  constantes

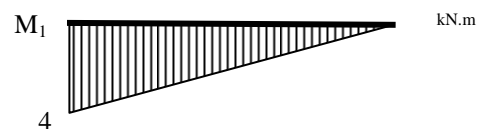
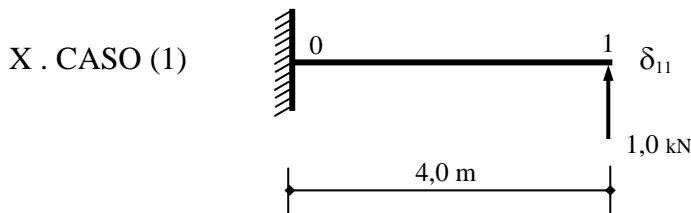
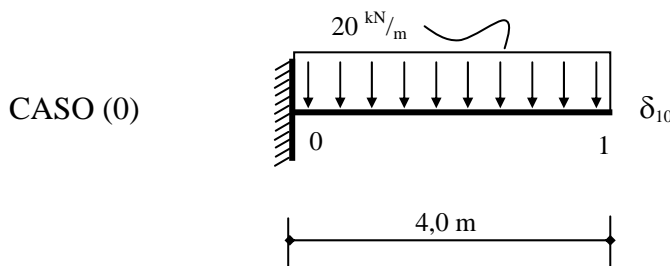
Resolução :

a) utilizando a flecha do apoio (1) para montagem da equação de compatibilidade :

- Definição da viga equivalente e numeração da estrutura (Caso Real) :



- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :



- Cálculo das flechas  $\delta_{10}$  ,  $\delta_{11}$  por Castigliano :

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0.M_1}{E.I} .dx = \frac{1}{E.I} . \int M_0.M_1 .dx = \frac{1}{E.I} . \left( -\frac{s.i.k}{4} \right) = \frac{1}{E.I} . \left( -\frac{4.160.4}{4} \right) = -\frac{640}{E.I}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4.4.4}{3} \right) = \frac{64}{3.E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X \cdot (1) \Rightarrow \delta_{1R} = \delta_{10} + X \cdot \delta_{11}$$

$$0 = -\frac{640}{E.I} + X \cdot \frac{64}{3.E.I} \Rightarrow X = +\frac{640}{E.I} \cdot \frac{3.E.I}{64} = 30,00$$

∴ podemos assim afirmar que a reação vertical no apoio (1) assume o valor  $X = 1,0 \text{ kN}$ , ou seja, vale  $30,00 \text{ kN}$ . O sinal positivo indica que ela assume o mesmo sentido escolhido na proposição do caso (1).

- Cálculo das Reações de Apoio

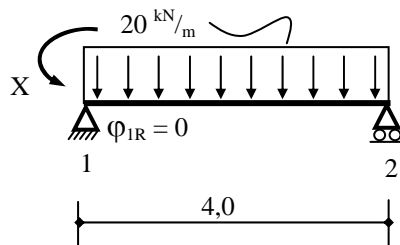
$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow -M_{R0} - 30.4 + 20.4.2 = 0 \Rightarrow M_{R0} = +40,00 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow +R_{V0} + 30 - 4.20 = 0 \Rightarrow R_{V0} = +50,00 \text{ kN}$$

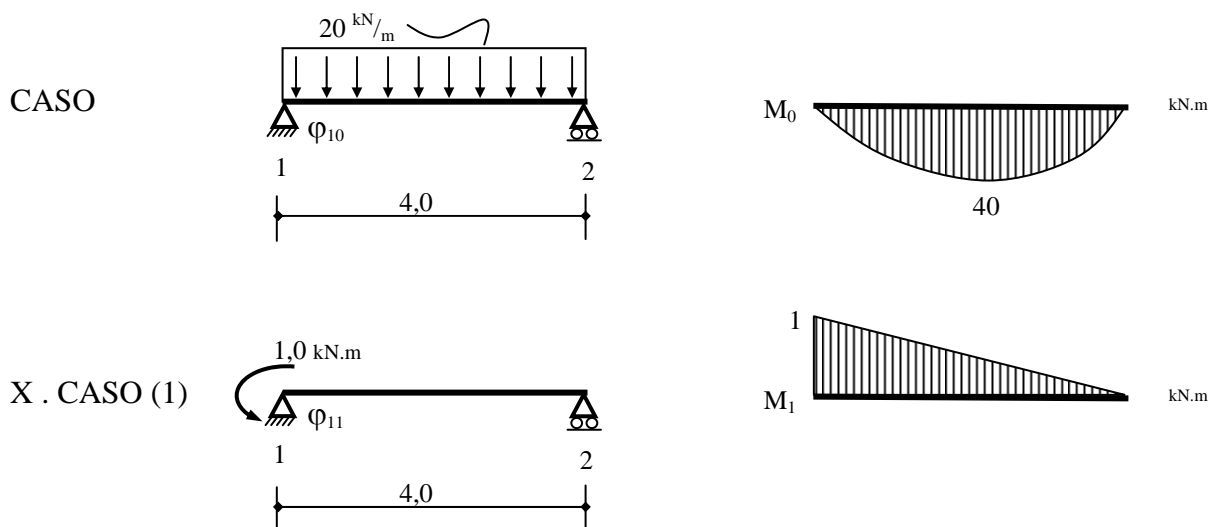
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{H0} = 0$$

b) utilizando o giro do engaste (1) para montagem da equação de compatibilidade :

- Definição da viga equivalente e numeração da estrutura (Caso Real) :



- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1), com seus respectivos gráficos de momento fletor :



- Cálculo dos giros  $\varphi_{10}$  ,  $\varphi_{11}$  por Castigliano :

$$\varphi_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( -\frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( -\frac{4 \cdot 40 \cdot 1}{3} \right) = -\frac{160}{3 \cdot E.I}$$

$$\varphi_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right) = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{3} \right) = \frac{4}{3 \cdot E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X \cdot (1) \Rightarrow \varphi_{1R} = \varphi_{10} + X \cdot \varphi_{11}$$

$$0 = -\frac{160}{3 \cdot E.I} + X \cdot \frac{4}{3 \cdot E.I} \Rightarrow X = +\frac{160}{3 \cdot E.I} \cdot \frac{3 \cdot E.I}{4} = 40,00$$

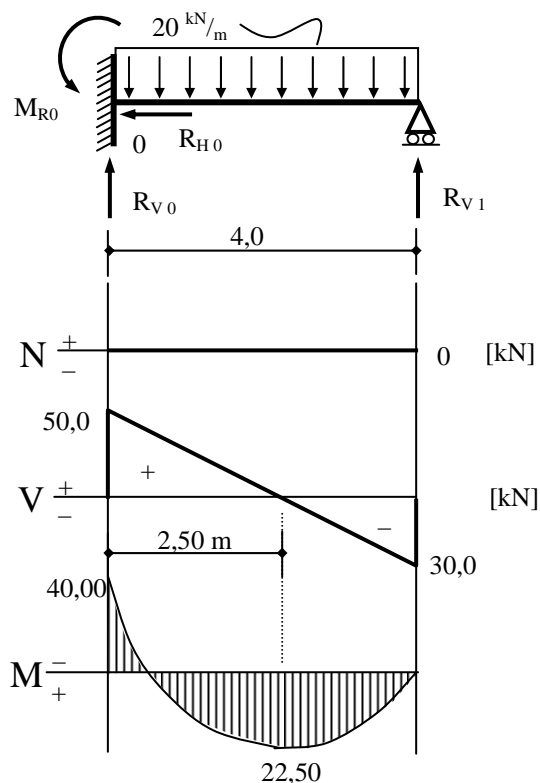
$\therefore$  podemos assim afirmar que o momento reativo no engaste (1) assume o valor  $X \cdot 1,0 \text{ kN.m}$  , ou seja, vale  $40,00 \text{ kN.m}$  . O sinal positivo indica que ela assume o mesmo sentido escolhido na proposição do caso (1) .

- Cálculo das Reações de Apoio

$$\sum M_0 = 0 \Rightarrow -40 - R_{V1} \cdot 4 + 20 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow R_{V1} = +30,00 \text{ kN}$$

$$\sum F_V = 0 \Rightarrow +R_{V0} + 30 - 4 \cdot 20 = 0 \Rightarrow R_{V0} = +50,00 \text{ kN}$$

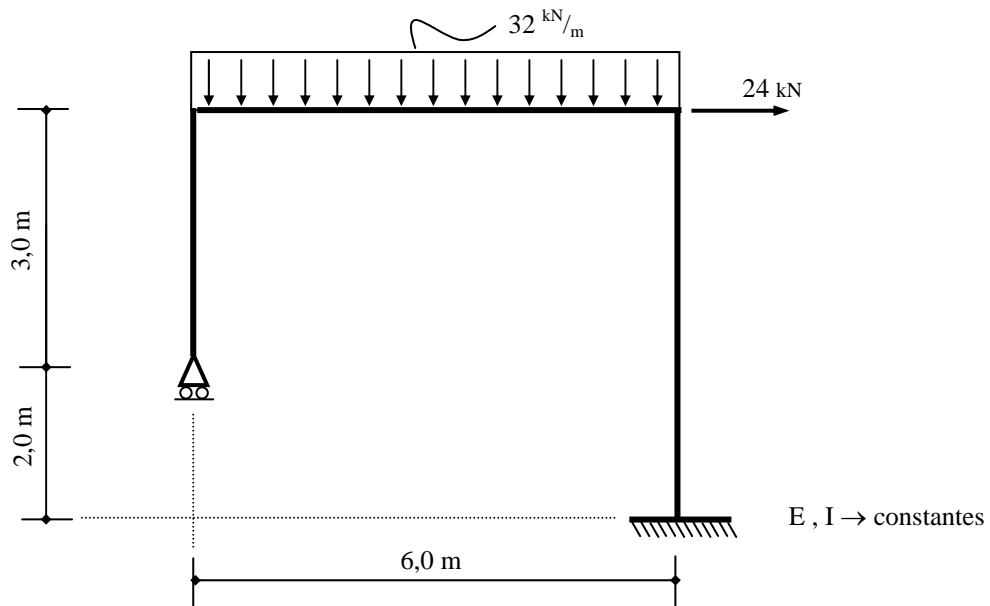
$$\sum F_H = 0 \Rightarrow R_{H0} = 0$$



Diagramas de Esforços Internos Solicitantes

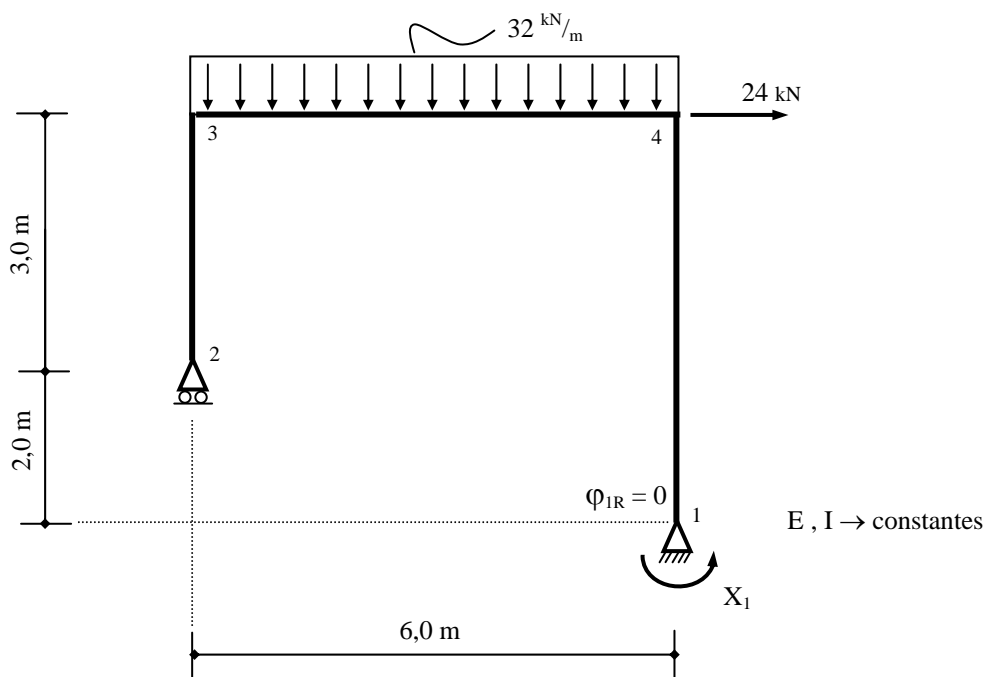
Nota : O exercício foi resolvido de duas maneiras possíveis para demonstrar o método , no caso poderia ser utilizada a resolução a) ou b) , que resultaram iguais como podemos comprovar no item de cálculo das reações.

EXERCÍCIO 05 : Na estrutura esquematizada abaixo , calcular as reações de apoio e os diagramas de esforços internos solicitantes :

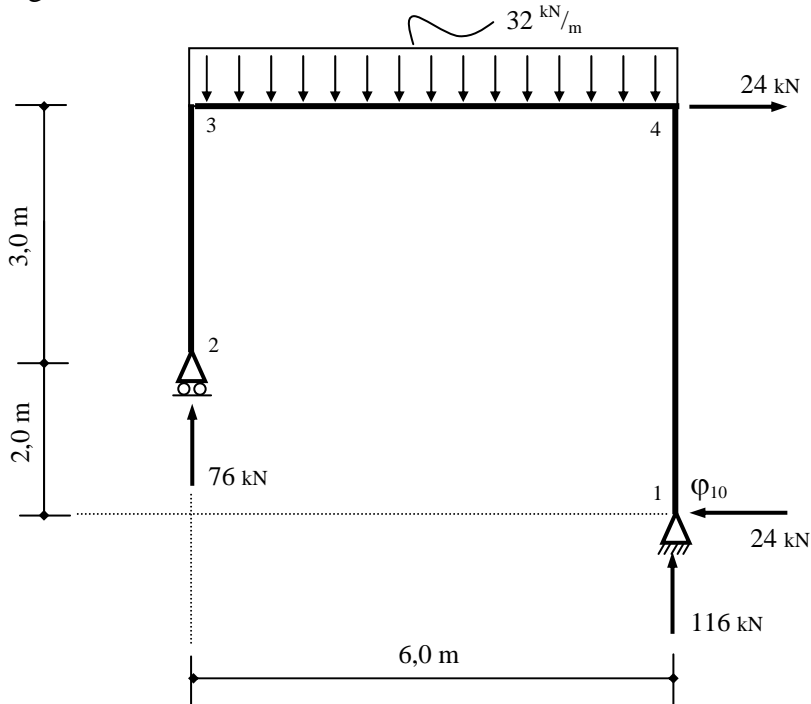


Resolução :

- Definição da estrutura equivalente e numeração (Caso Real) :

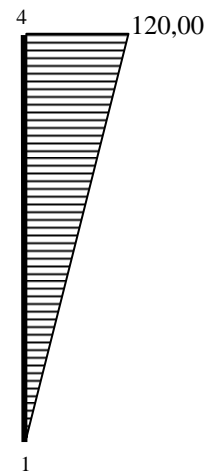
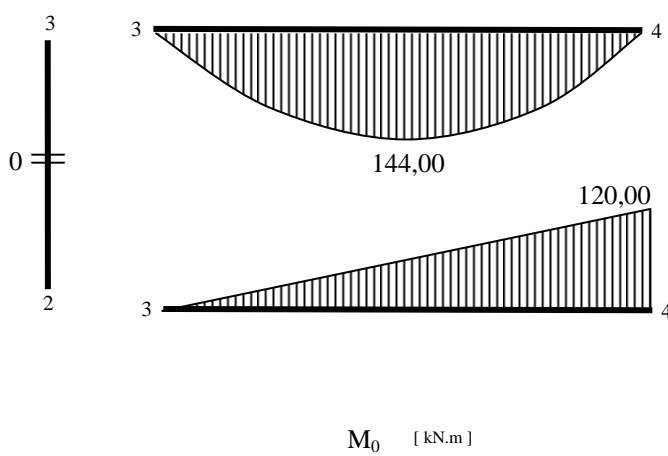


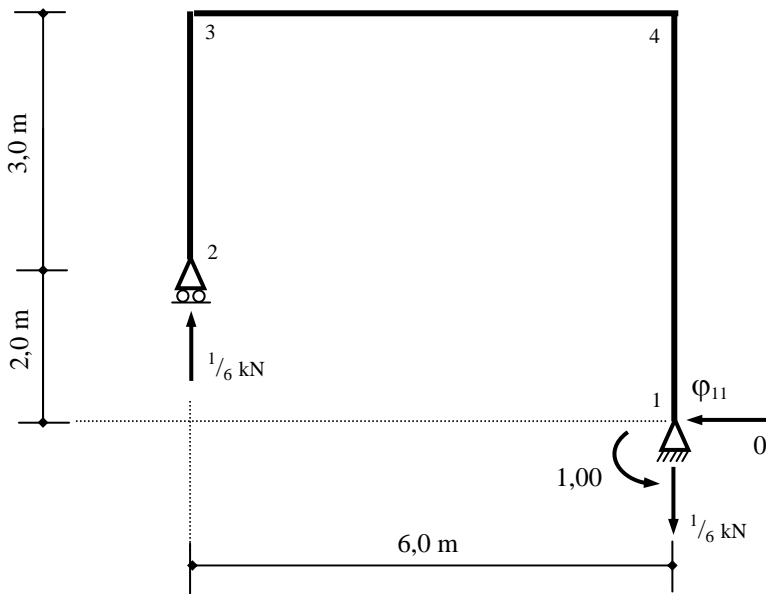
- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1), com seus respectivos gráficos de momento fletor :



CASO (0)

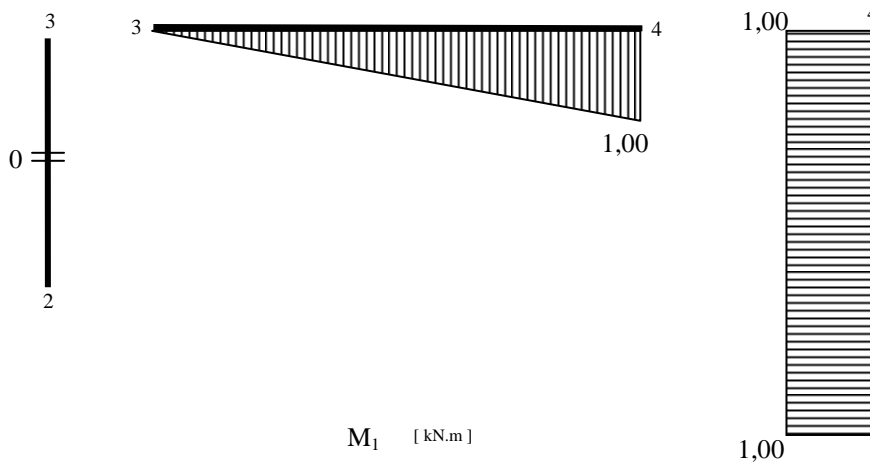
$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ + 24 - R_{H1} &= 0 \\ R_{H1} &= 24 \\ \sum M_1 &= 0 \\ + R_{V2} \cdot 6 + 24 \cdot 5 - 32 \cdot 6 \cdot 3 &= 0 \\ R_{V2} &= 76 \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} + 76 - 32 \cdot 6 &= 0 \\ R_{V1} &= 116 \end{aligned}$$





$X_1$  . CASO (1)

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ R_{H1} &= 0 \\ \sum M_1 &= 0 \\ + R_{V2} \cdot 6 - 1 &= 0 \\ R_{V2} &= \frac{1}{6} \\ \sum F_V &= 0 \\ - R_{V1} + \frac{1}{6} &= 0 \\ R_{V1} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$



▪ Cálculo dos giros  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{11}$ , por Castigliano :

$$\varphi_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{2} \right)$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{6 \cdot 1 \cdot 144}{3} - \frac{6 \cdot 1 \cdot 120}{3} - \frac{5 \cdot 1 \cdot 120}{2} \right) = -\frac{252}{E.I}$$

$$\varphi_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + s.i.k \right)$$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{6 \cdot 1 \cdot 1}{3} + 5 \cdot 1 \cdot 1 \right) = +\frac{7}{E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(\mathbf{R}) = (\mathbf{0}) + \mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{1}) \Rightarrow 0 = \varphi_{10} + \mathbf{X}_1 \cdot \varphi_{11} \Rightarrow \mathbf{X}_1 = -\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{11}}$$

$$\mathbf{X}_1 = -\left(-\frac{252}{EI}\right) \cdot \frac{EI}{7} = 36,00$$

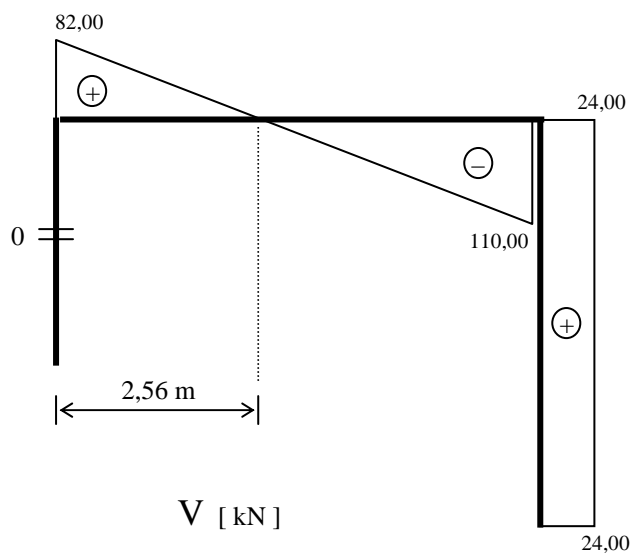
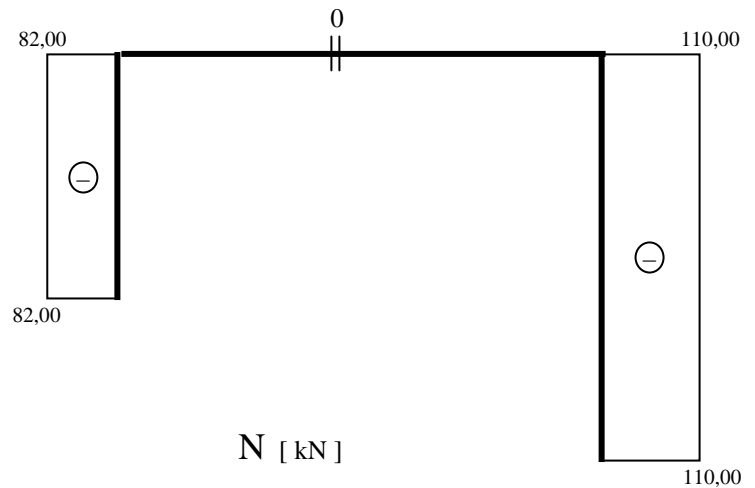
$\therefore$  podemos assim afirmar que o momento reativo no engaste (1) assume o valor  $\mathbf{X}_1 \cdot 1,0 \text{ kN.m}$ , ou seja, vale  $36,00 \text{ kN.m}$ . O sinal positivo indica que o momento assume o mesmo sentido ao escolhido na proposição dos casos.

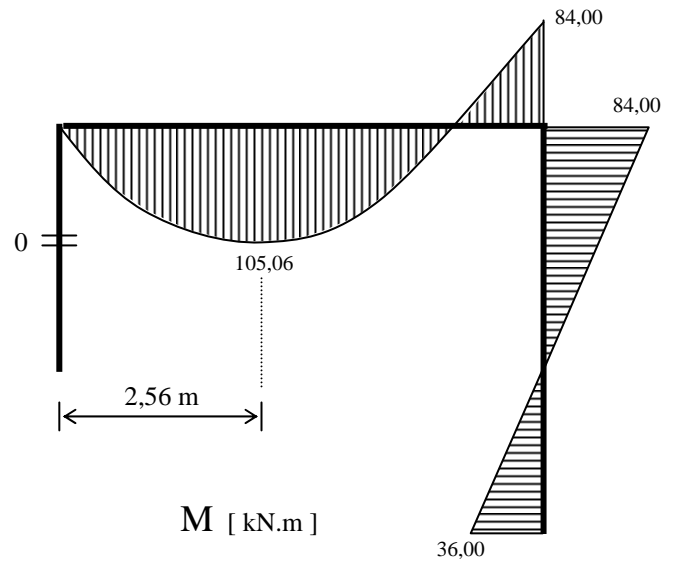
- Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

$$R_{V1} = 116,00 + 36,00 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = 110,00 \text{ kN}$$

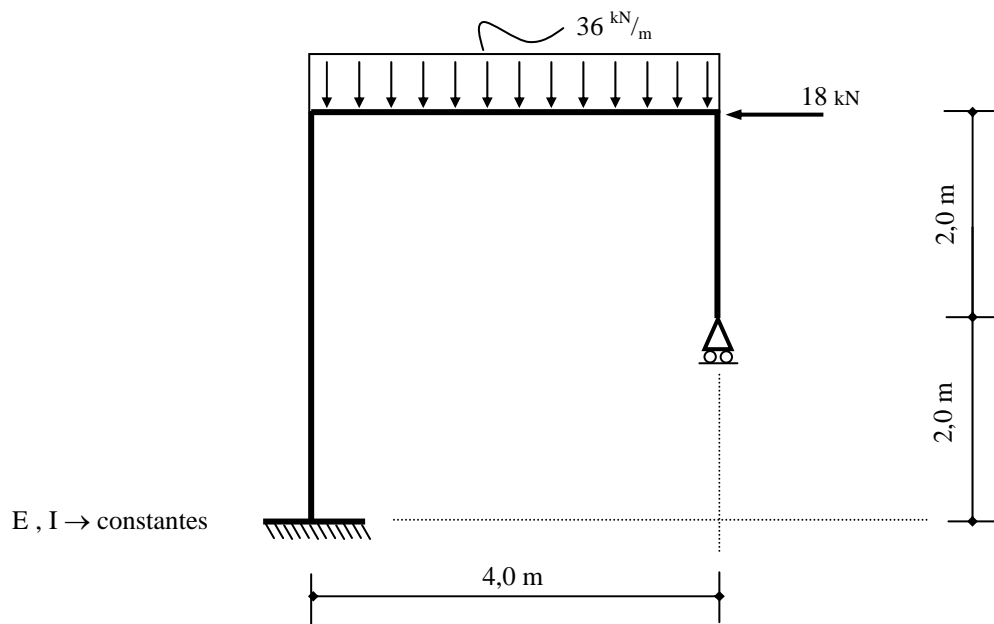
$$R_{H1} = 24,00 + 36,00 \cdot (0) = 24,00 \text{ kN}$$

$$R_{V2} = 76,00 + 36,00 \cdot \left(+\frac{1}{6}\right) = 82,00 \text{ kN}$$



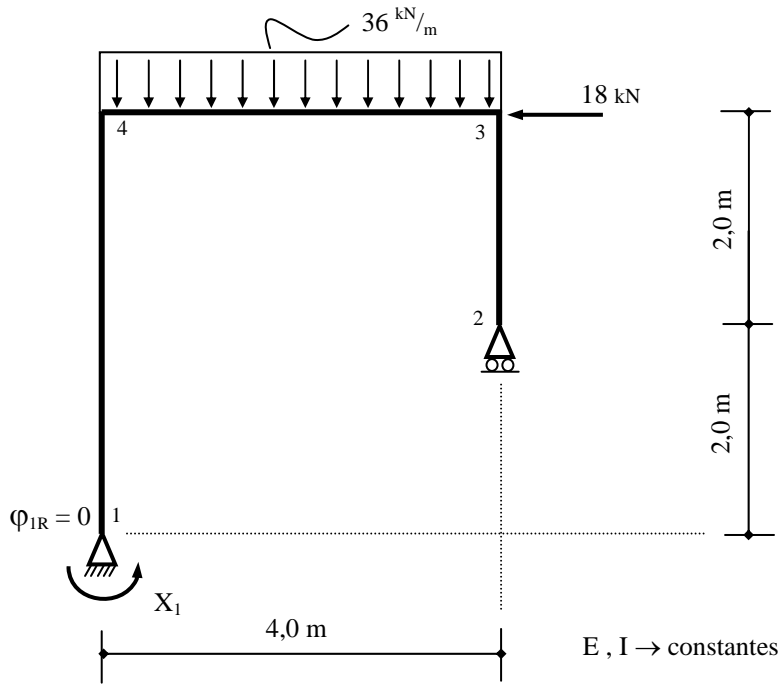


EXERCÍCIO 06 : Na estrutura esquematizada abaixo , calcular as reações de apoio e os diagramas de esforços internos solicitantes :

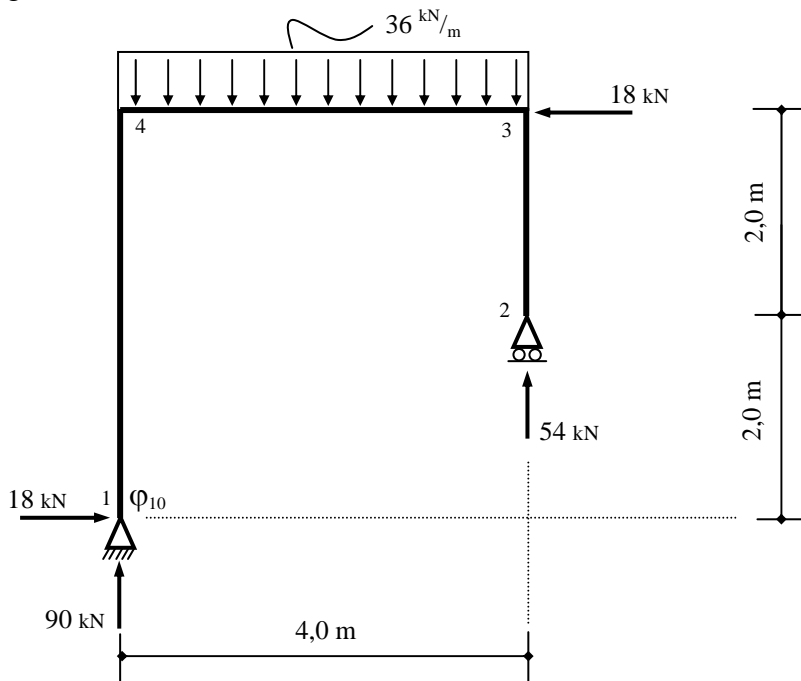


Resolução :

- Definição da estrutura equivalente e numeração (Caso Real) :

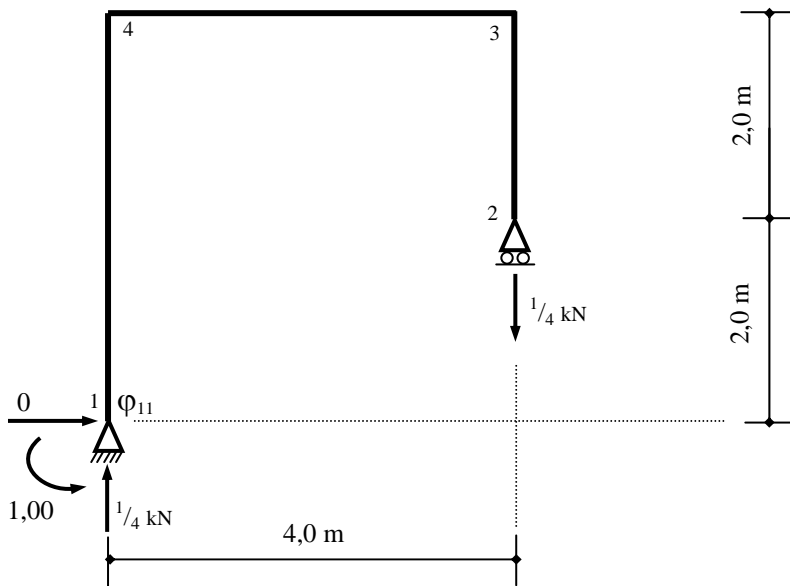
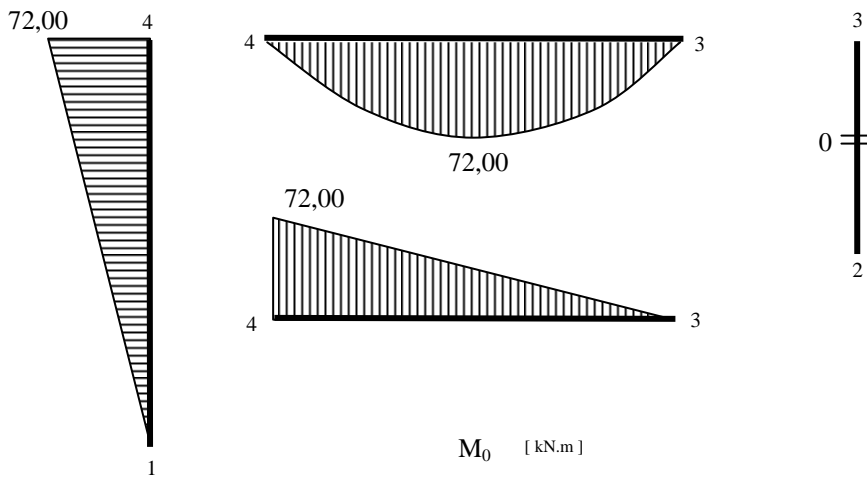


- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica e Caso (1), com seus respectivos gráficos de momento fletor :



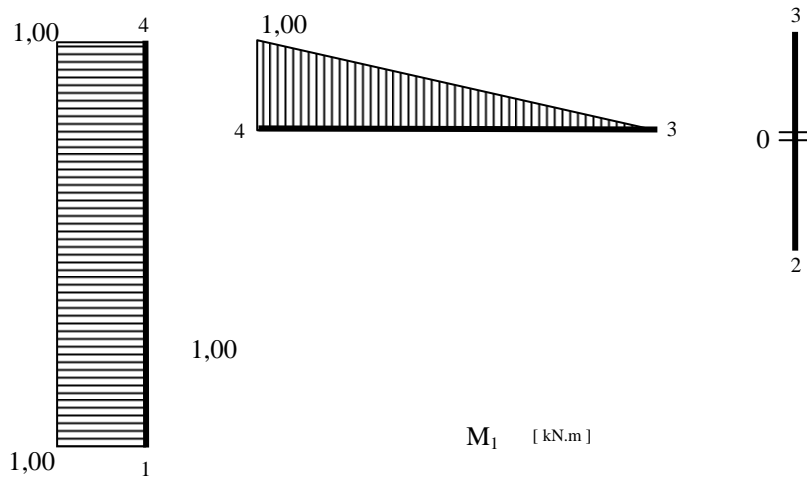
CASO (0)

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ -18 + R_{H1} &= 0 \\ R_{H1} &= 18 \\ \sum M_1 &= 0 \\ -R_{V2} \cdot 4 - 18 \cdot 4 + 36 \cdot 4 \cdot 2 &= 0 \\ R_{V2} &= 54 \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} + 54 - 36 \cdot 4 &= 0 \\ R_{V1} &= 90 \end{aligned}$$



$X_1$  . CASO (1)

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ R_{H1} &= 0 \\ \sum M_1 &= 0 \\ + R_{V2} \cdot 4 - 1 &= 0 \\ R_{V2} &= \frac{1}{4} \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} - \frac{1}{4} &= 0 \\ R_{V1} &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$



- Cálculo dos giros  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{11}$ , por Castigliano :

$$\varphi_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{3} - \frac{s.i.k}{2} \right)$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( -\frac{4.1.72}{3} + \frac{4.1.72}{3} + \frac{4.1.72}{2} \right) = + \frac{144}{E.I}$$

$$\varphi_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + s.i.k \right)$$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4.1.1}{3} + 4.1.1 \right) = + \frac{16}{3.E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X_1 \cdot (1) \Rightarrow 0 = \varphi_{10} + X_1 \cdot \varphi_{11} \Rightarrow X_1 = -\frac{\varphi_{10}}{\varphi_{11}}$$

$$X_1 = -\frac{144}{E.I} \cdot \frac{3.E.I}{16} = -27,00$$

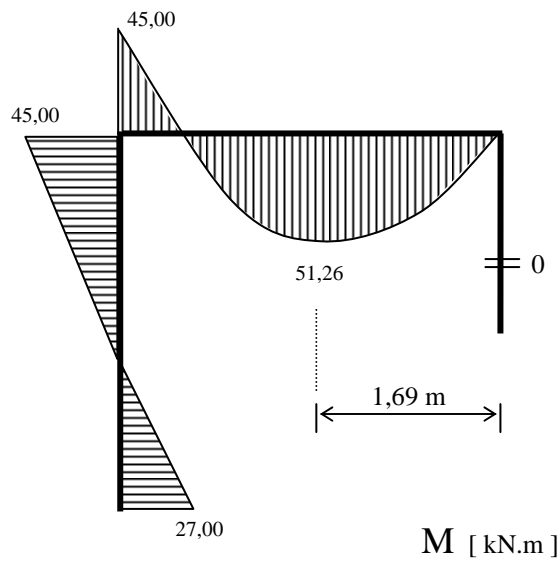
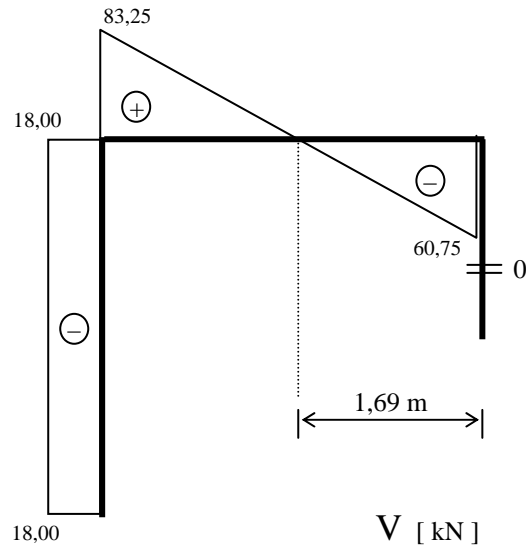
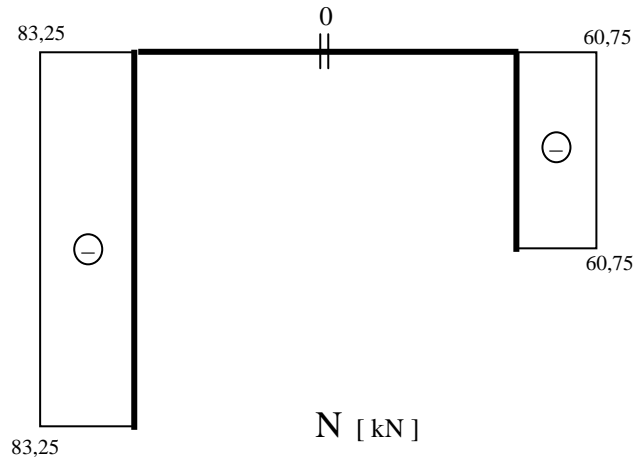
∴ podemos assim afirmar que o momento reativo no engaste (1) assume o valor  $X_1 \cdot 1,0 \text{ kN.m}$ , ou seja, vale  $27,00 \text{ kN.m}$ . O sinal negativo indica que o momento assume o sentido contrário ao escolhido na proposição dos casos.

- Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

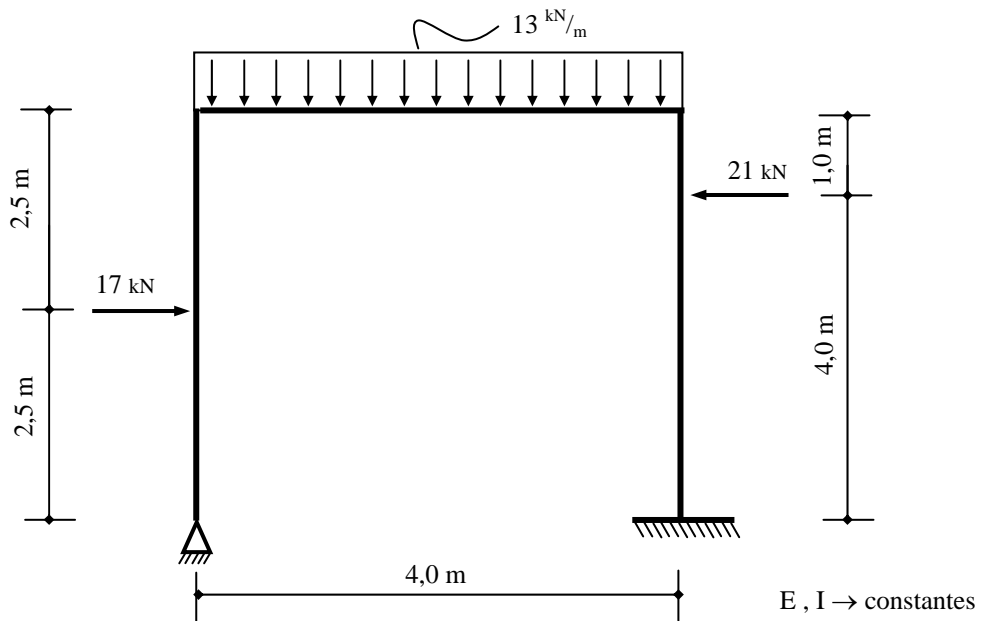
$$R_{V1} = 90,00 - 27,00 \cdot (+\frac{1}{4}) = 83,25 \text{ kN}$$

$$R_{H1} = 18,00 - 27,00 \cdot (0) = 18,00 \text{ kN}$$

$$R_{V2} = 54,00 - 27,00 \cdot (-\frac{1}{4}) = 60,75 \text{ kN}$$

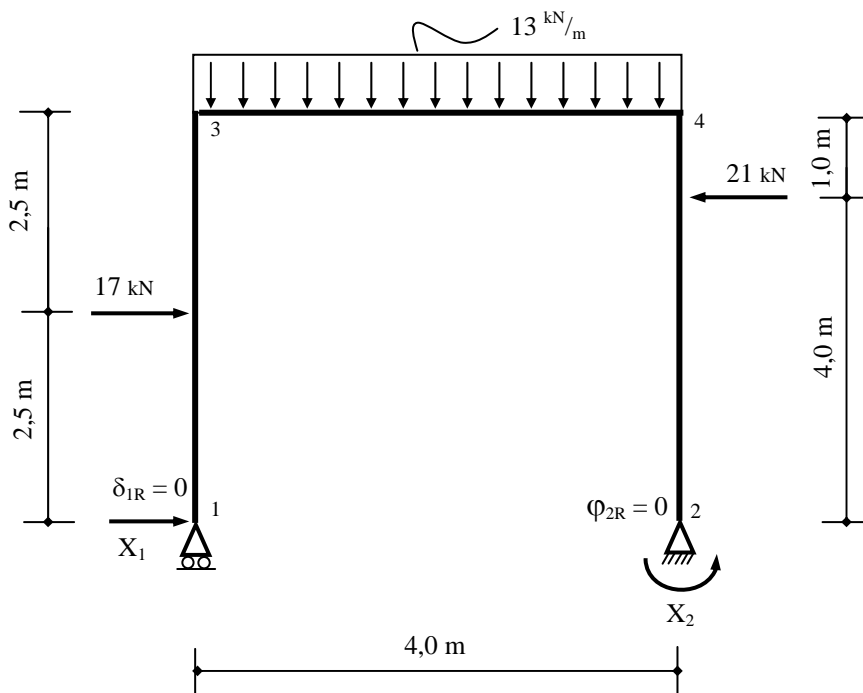


EXERCÍCIO 07 : Na estrutura esquematizada abaixo , calcular as reações de apoio e os diagramas de esforços internos solicitantes :

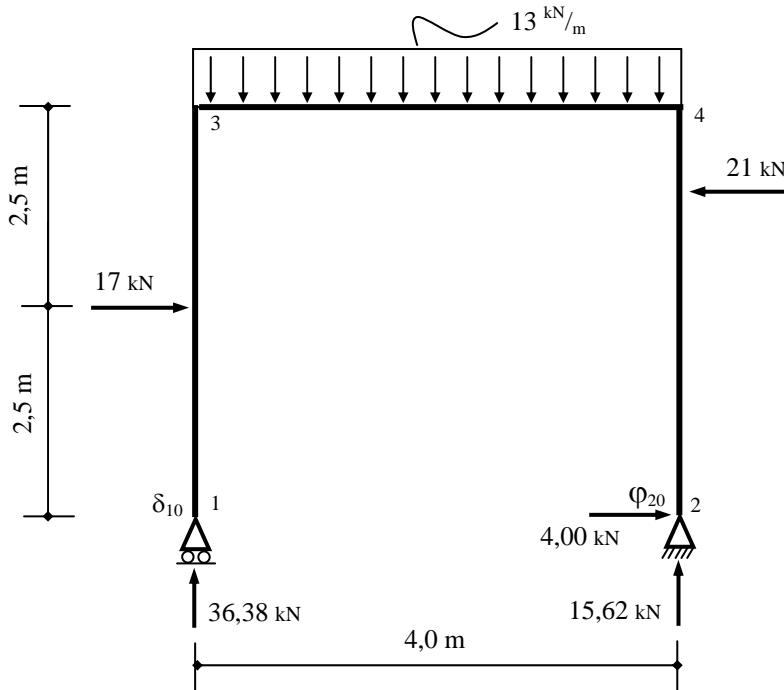


Resolução :

- Definição da estrutura equivalente e numeração (Caso Real) :



- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica , Caso (1) e Caso (2) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :



CASO (0)

$$\sum F_H = 0$$

$$+17 - 21 + R_{H2} = 0$$

$$R_{H2} = 4$$

$$\sum M_1 = 0$$

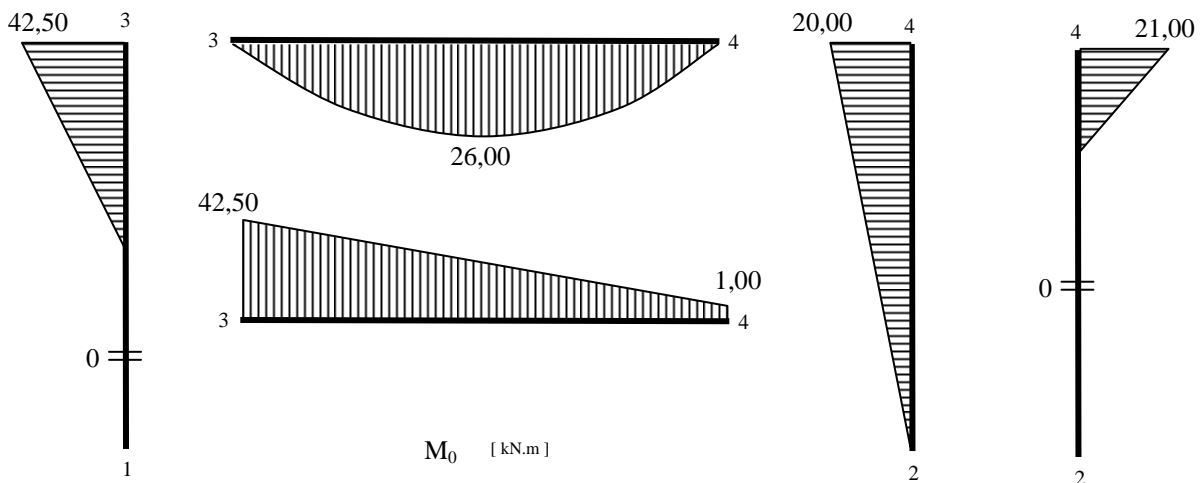
$$-R_{V2} \cdot 4 + 17 \cdot 2,5 + 13 \cdot 4 \cdot 2 - 21 \cdot 4 = 0$$

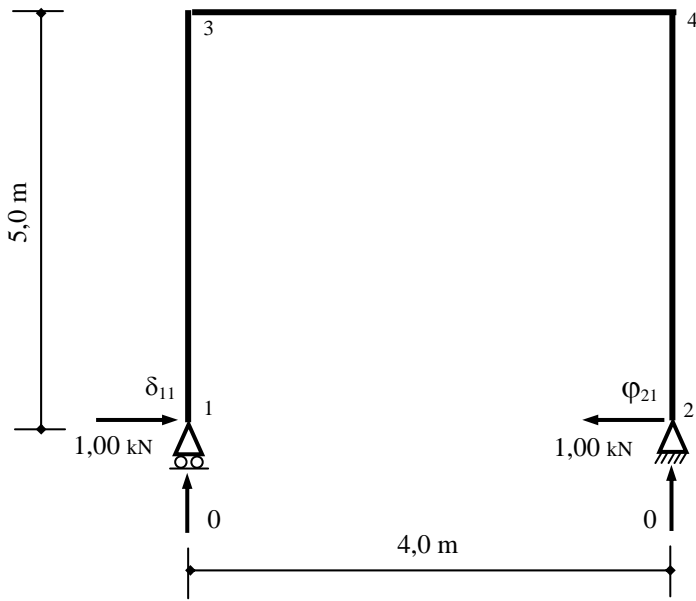
$$R_{V2} = 15,62$$

$$\sum F_V = 0$$

$$R_{V1} + 15,62 - 13 \cdot 4 = 0$$

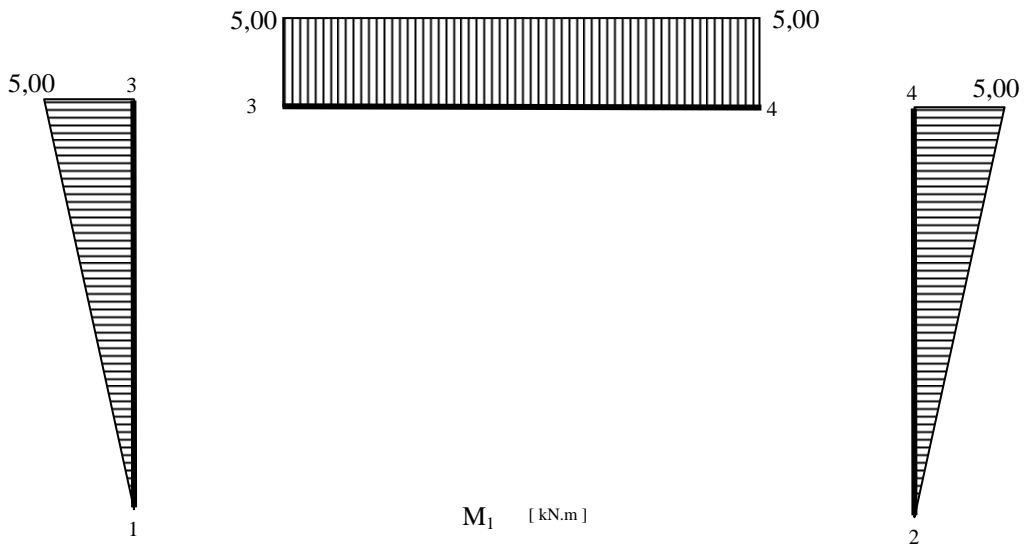
$$R_{V1} = 36,38$$

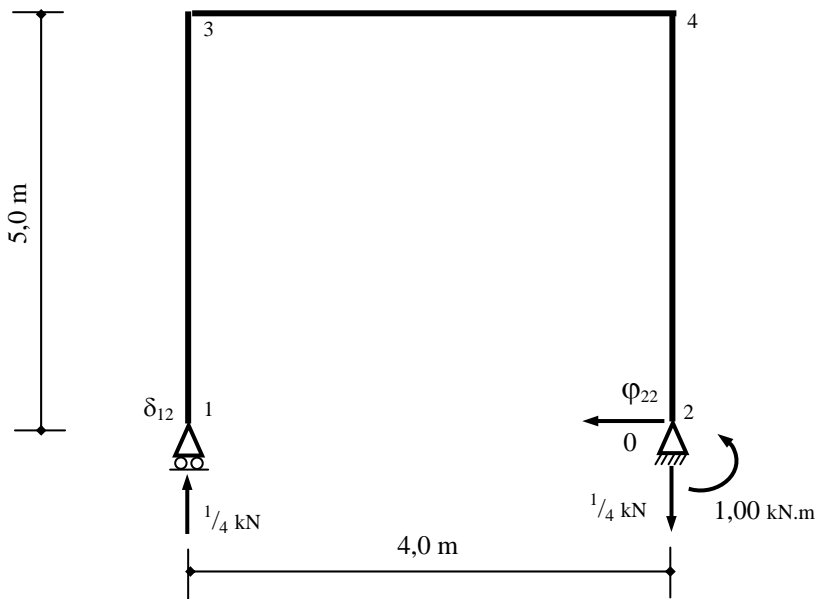




$X_1$  . CASO (1)

$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ 1 - R_{H2} &= 0 \\ R_{H2} &= 1 \\ \sum M_1 &= 0 \\ + R_{V2} \cdot 4 &= 0 \\ R_{V2} &= 0 \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} + 0 &= 0 \\ R_{V1} &= 0 \end{aligned}$$





$X_2$  . CASO (2)

$$\sum F_H = 0$$

$$R_{H2} = 0$$

$$\sum M_1 = 0$$

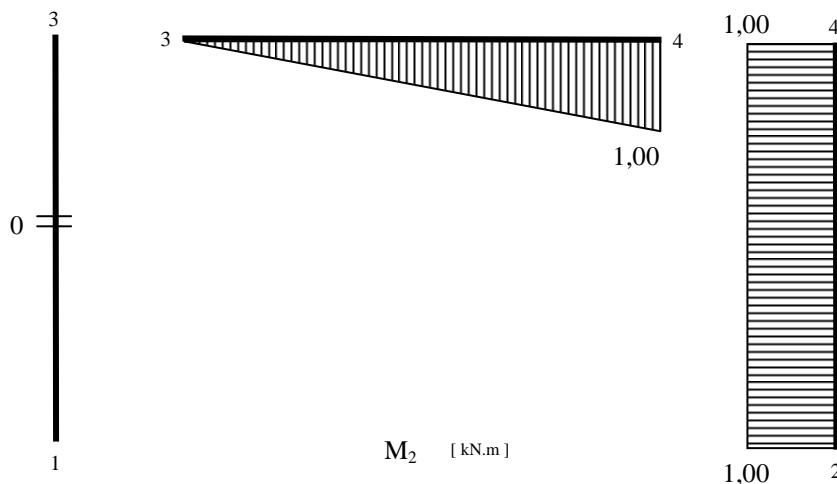
$$+ R_{V2} \cdot 4 - 1 = 0$$

$$R_{V2} = 1/4$$

$$\sum F_V = 0$$

$$R_{V1} - 1/4 = 0$$

$$R_{V1} = 1/4$$



- Cálculo dos giros  $\varphi_{20}$ ,  $\varphi_{21}$ ,  $\varphi_{22}$ , e das flechas  $\delta_{10}$ ,  $\delta_{11}$ ,  $\delta_{12}$ , por Castigliano :

$$\delta_{10} = \int \frac{M_0 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0 \cdot M_1 \cdot dx$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[ \frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) + \frac{s.i}{2} \cdot (k_1 + k_2) - \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) - \frac{s.i.k}{3} \right]$$

$$\delta_{10} = \frac{1}{E.I} \cdot \left[ \frac{2,5 \cdot 42,5}{6} \cdot (2,5 + 2,5) + \frac{4,5}{2} \cdot (42,5 + 1) - \frac{8 \cdot 26,5}{3} + \frac{1,21}{6} \cdot (2,5 + 4) - \frac{5 \cdot 20,5}{3} \right] = + \frac{192,02}{E.I}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{M_1 \cdot M_1}{E.I} \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} + s.i.k + \frac{s.i.k}{3} \right)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{E.I} \left( \frac{5.5.5}{3} + 4.5.5 + \frac{5.5.5}{3} \right) = + \frac{183,33}{E.I}$$

$$\delta_{12} = \varphi_{21} = \int \frac{M_1.M_2}{E.I} .dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_1.M_2 .dx = \frac{1}{E.I} \left( -\frac{s.i.k}{2} - \frac{s.i.k}{2} \right)$$

$$\delta_{12} = \varphi_{21} = \frac{1}{E.I} \left( -\frac{4.5.1}{2} - \frac{5.1.5}{2} \right) = -\frac{22,50}{E.I}$$

$$\varphi_{20} = \int \frac{M_0.M_2}{E.I} .dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_0.M_2 .dx = \frac{1}{E.I} \left[ -\frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) + \frac{s.i.k}{3} + \frac{s.i.k}{2} - \frac{s.i.k}{2} \right]$$

$$\varphi_{20} = \frac{1}{E.I} \left[ -\frac{4.1}{6} \cdot (2.1 + 42,5) + \frac{4.1.26}{3} + \frac{5.20.1}{2} - \frac{1.21.1}{2} \right] = + \frac{44,50}{E.I}$$

$$\varphi_{22} = \int \frac{M_2.M_2}{E.I} .dx = \frac{1}{E.I} \cdot \int M_2.M_2 .dx = \frac{1}{E.I} \left( \frac{s.i.k}{3} + s.i.k \right)$$

$$\varphi_{22} = \frac{1}{E.I} \left( \frac{4.1.1}{3} + 5.1.1 \right) = + \frac{6,33}{E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X_1 \cdot (1) + X_2 \cdot (2) \Rightarrow \begin{cases} \delta_{1R} = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} \\ \varphi_{2R} = \varphi_{20} + X_1 \cdot \varphi_{21} + X_2 \cdot \varphi_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{192,02}{E.I} + \frac{183,33}{E.I} \cdot X_1 - \frac{22,50}{E.I} \cdot X_2 \\ 0 = \frac{44,50}{E.I} - \frac{22,50}{E.I} \cdot X_1 + \frac{6,33}{E.I} \cdot X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -192,02 = 183,33 \cdot X_1 - 22,50 \cdot X_2 \\ -44,50 = -22,50 \cdot X_1 + 6,33 \cdot X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -3,388 \\ X_2 = -19,074 \end{cases}$$

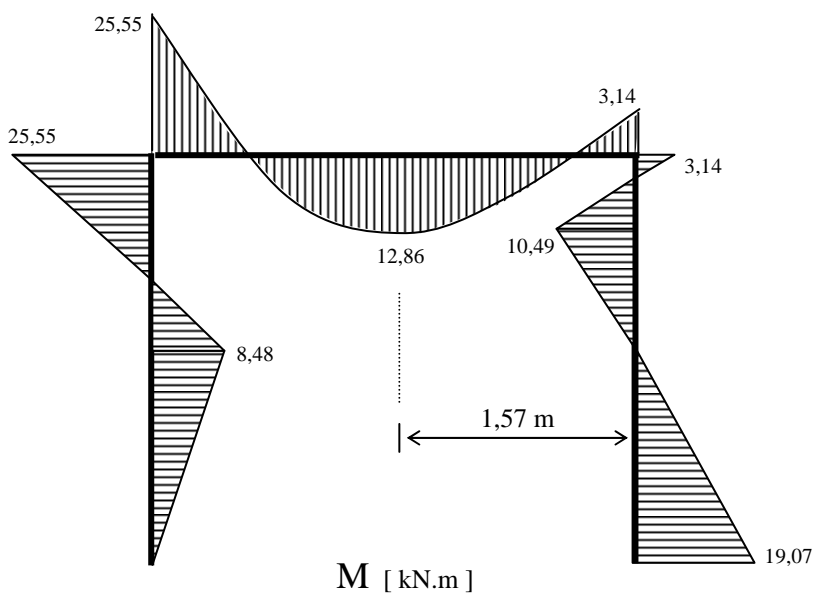
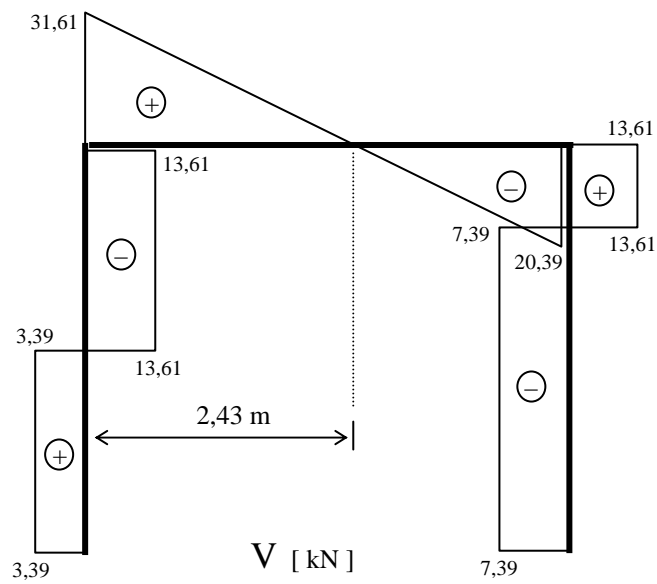
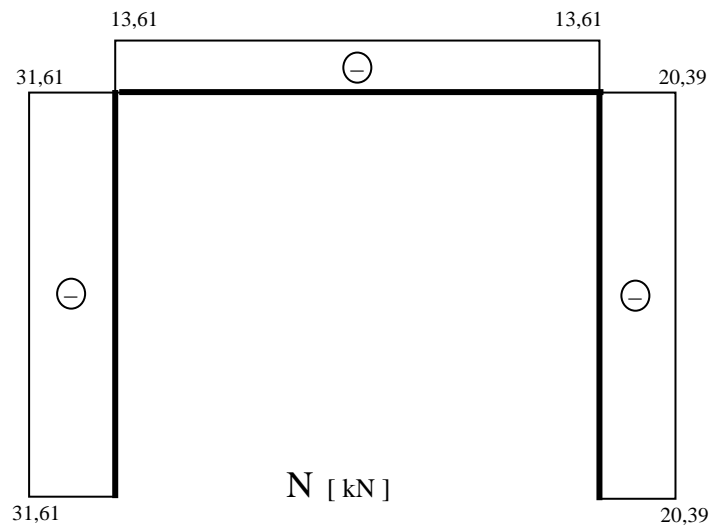
∴ podemos assim afirmar que o momento reativo no engaste (2) assume o valor  $X_2 \cdot 1,0 \text{ kN.m}$  , ou seja, vale  $19,07 \text{ kN.m}$  ; e a reação horizontal no apoio (1) assume o valor  $X_1 \cdot 1,0 \text{ kN}$  , ou seja , vale  $3,39 \text{ kN}$ . O sinais negativos indicam que o momento e a reação horizontal assumem o sentido contrário ao escolhido na proposição dos casos .

- Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

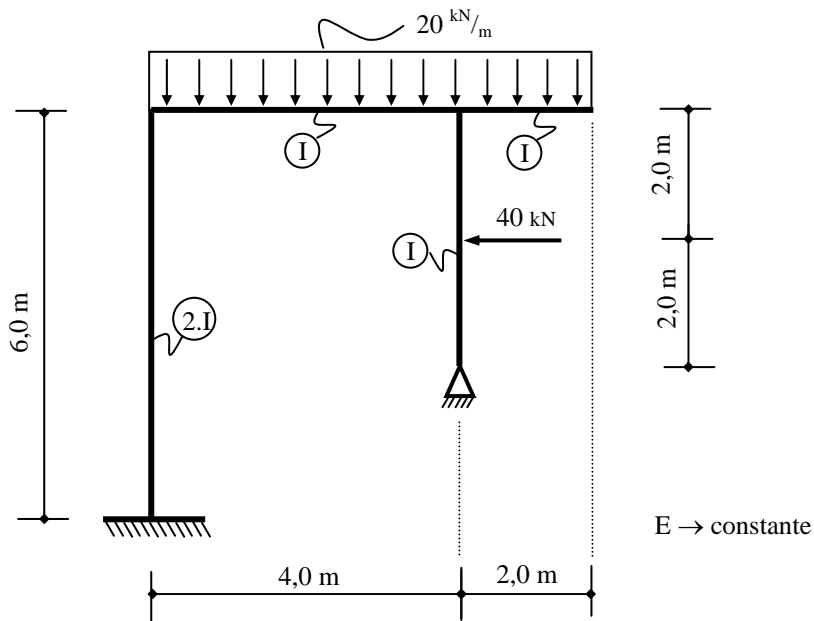
$$R_{V1} = 36,38 - 3,388 \cdot 0 - 19,074 \cdot (+\frac{1}{4}) = 31,61 \text{ kN}$$

$$R_{H2} = 4,00 - 3,388 \cdot (-1) - 19,074 \cdot 0 = 7,39 \text{ kN}$$

$$R_{V2} = 15,62 - 3,388 \cdot 0 - 19,074 \cdot (-\frac{1}{4}) = 20,39 \text{ kN}$$

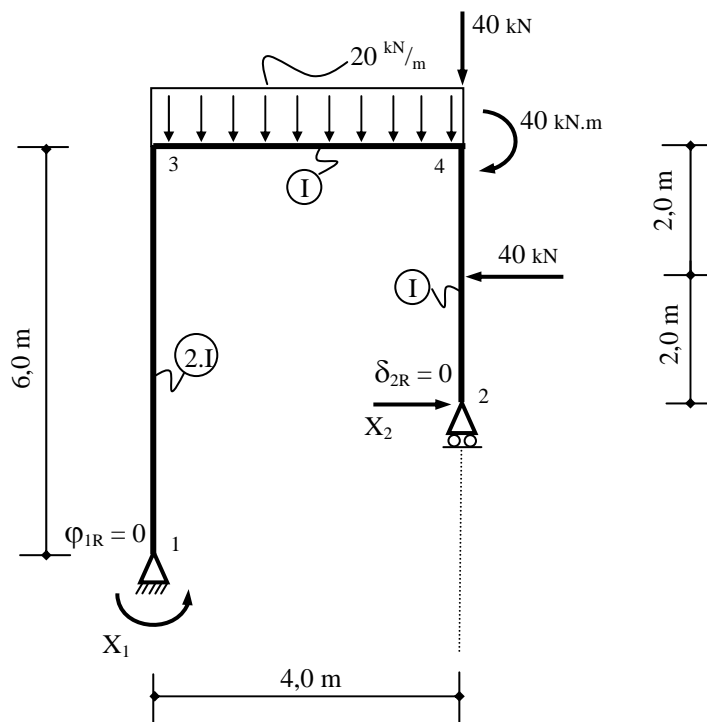


EXERCÍCIO 08 : Na estrutura esquematizada abaixo , calcular as reações de apoio e os diagramas de esforços internos solicitantes :

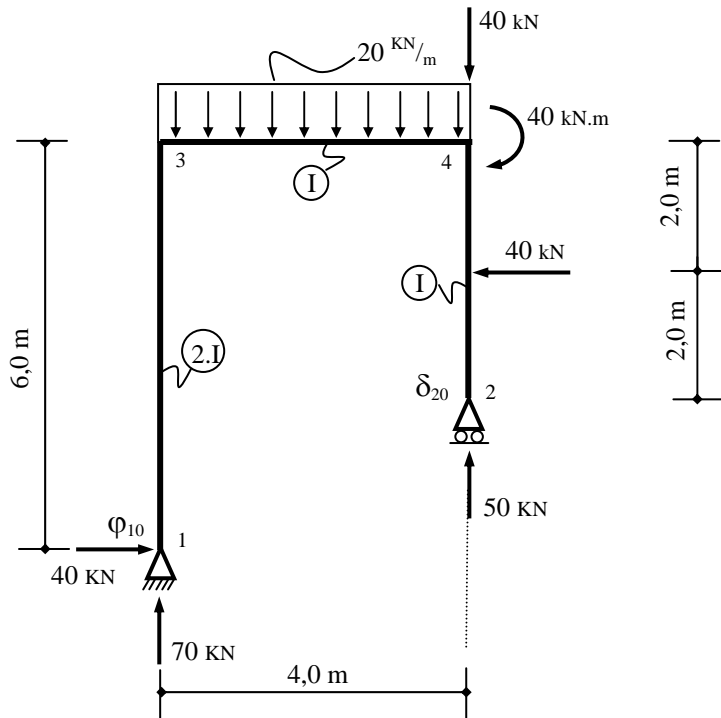


Resolução :

- Definição da estrutura equivalente e numeração (Caso Real) :

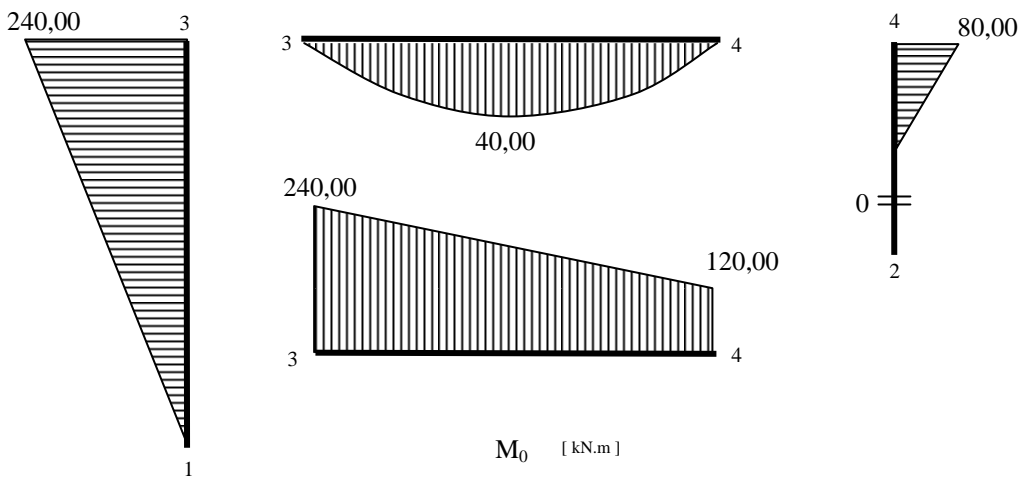


- Desmembramento da estrutura em Caso (0) – Isostática Básica , Caso (1) e Caso (2) , com seus respectivos gráficos de momento fletor :

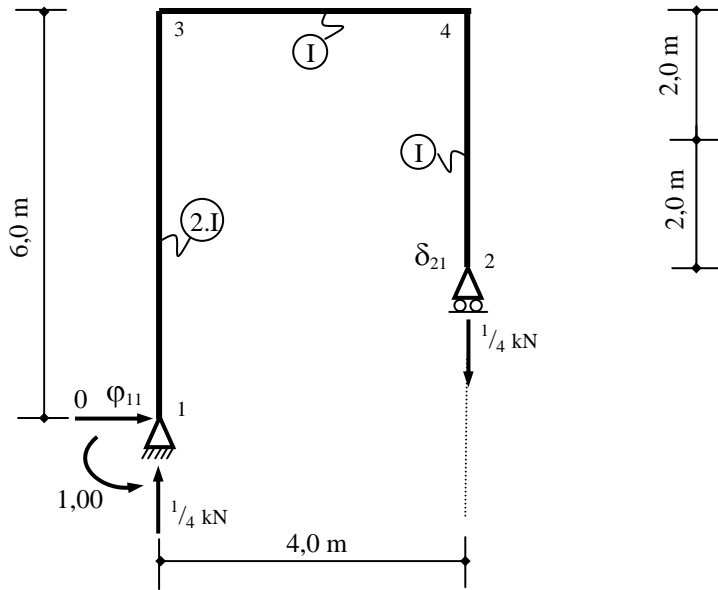


CASO (0)

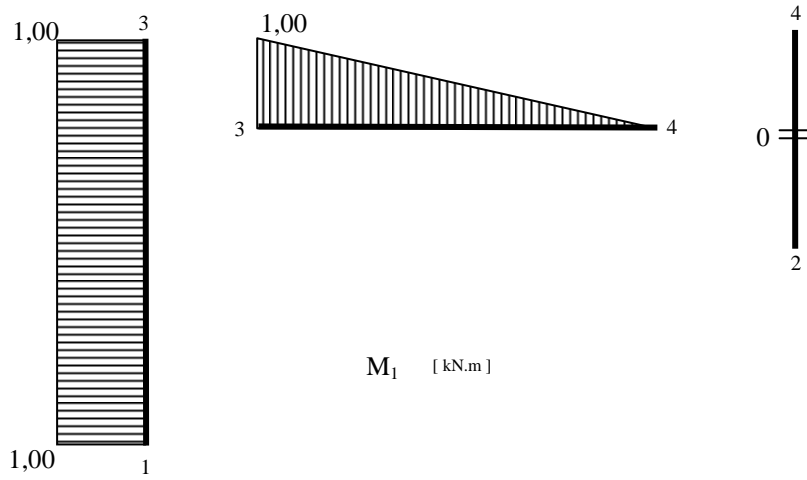
$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ -40 + R_{H1} &= 0 \\ R_{H1} &= 40 \\ \sum M_1 &= 0 \\ -R_{V2} \cdot 4 - 40 \cdot 4 + 20 \cdot 4 \cdot 2 + 40 \cdot 4 + 40 &= 0 \\ R_{V2} &= 50 \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} + 50 - 20 \cdot 4 - 40 &= 0 \\ R_{V1} &= 70 \end{aligned}$$



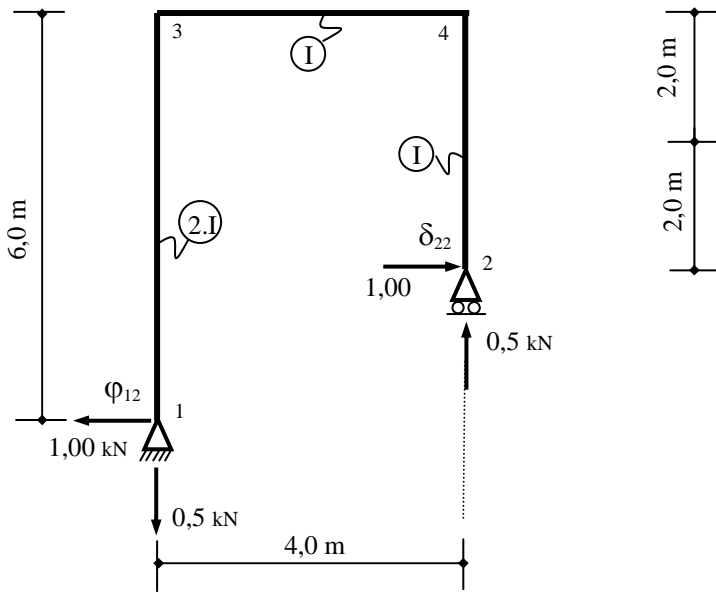
$X_1$  . CASO (1)



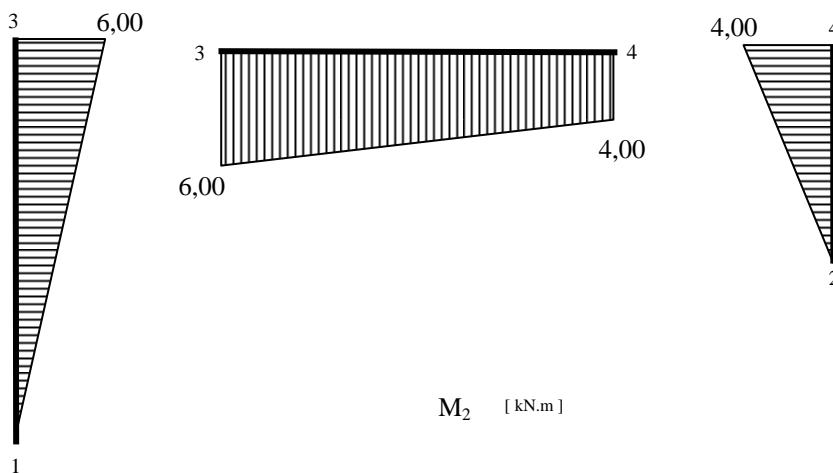
$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ R_{H1} &= 0 \\ \sum M_1 &= 0 \\ + R_{V2} \cdot 4 - 1 &= 0 \\ R_{V2} &= 1/4 \\ \sum F_V &= 0 \\ R_{V1} - 1/4 &= 0 \\ R_{V1} &= 1/4 \end{aligned}$$



X<sub>2</sub> . CASO (2)



$$\begin{aligned} \sum F_H &= 0 \\ R_{H1} - 1 &= 0 \\ R_{H1} &= 1 \\ \sum M_1 &= 0 \\ -R_{V2} \cdot 4 + 1 \cdot 2 &= 0 \\ R_{V2} &= 0,5 \\ \sum F_V &= 0 \\ -R_{V1} + 0,5 &= 0 \\ R_{V1} &= 0,5 \end{aligned}$$



- Cálculo dos giros  $\varphi_{10}$ ,  $\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$ , e das flechas  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{21}$ ,  $\delta_{22}$ , por Castigliano :

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2.E.I} \cdot \int_1^3 M_0 \cdot M_1 \cdot dx + \frac{1}{E.I} \cdot \int_3^2 M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{2.E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{2} \right) + \frac{1}{E.I} \cdot \left[ \frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) - \frac{s.i.k}{3} \right]$$

$$\varphi_{10} = \frac{1}{2.E.I} \cdot \left( \frac{6 \cdot 240 \cdot 1}{2} \right) + \frac{1}{E.I} \cdot \left[ \frac{4 \cdot 1}{6} \cdot (2 \cdot 240 + 120) - \frac{4 \cdot 40 \cdot 1}{3} \right] = \frac{2120}{3.E.I}$$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{2.E.I} \cdot \int_1^3 M_0 \cdot M_1 \cdot dx + \frac{1}{E.I} \cdot \int_3^2 M_0 \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{2.E.I} \cdot (s.i.k) + \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{s.i.k}{3} \right)$$

$$\varphi_{11} = \frac{1}{2.E.I} \cdot (6 \cdot 1 \cdot 1) + \frac{1}{E.I} \cdot \left( \frac{4 \cdot 1 \cdot 1}{3} \right) = \frac{13}{3.E.I}$$

$$\varphi_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2.E.I} \int_1^3 M_1.M_2.dx + \frac{1}{E.I} \int_3^2 M_1.M_2.dx = \frac{1}{2.E.I} \left( -\frac{s.i.k}{2} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ -\frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) \right]$$

$$\varphi_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{2.E.I} \left( -\frac{6.6.1}{2} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ -\frac{4.1}{6} \cdot (2.6 + 4) \right] = -\frac{59}{3.E.I}$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{2.E.I} \int_1^3 M_0.M_2.dx + \frac{1}{E.I} \int_3^2 M_0.M_2.dx$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{2.E.I} \left( -\frac{s.i.k}{3} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ \frac{s.i}{3} \cdot (k_1 + k_2) - \frac{s}{6} \cdot (2.i_1.k_1 + i_1.k_2 + i_2.k_1 + 2.i_2.k_2) - \frac{s.i}{6} \cdot (2.k_1 + k_2) \right]$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{2.E.I} \left( -\frac{6.6.240}{3} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ \frac{4.40}{3} \cdot (6 + 4) - \frac{4}{6} \cdot (2.6.240 + 240.4 + 120.6 + 2.4.120) - \frac{2.80}{6} \cdot (2.4 + 2) \right]$$

$$\delta_{20} = -\frac{14560}{3.E.I}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2.E.I} \int_1^3 M_2.M_2.dx + \frac{1}{E.I} \int_3^2 M_2.M_2.dx = \frac{1}{2.E.I} \left( \frac{s.i.k}{3} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ \frac{s.i.k}{3} + \frac{s}{6} \cdot (2.i_1.k_1 + i_1.k_2 + i_2.k_1 + 2.i_2.k_2) \right]$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{2.E.I} \left( \frac{6.6.6}{3} \right) + \frac{1}{E.I} \left[ \frac{4.4.4}{3} + \frac{4}{6} \cdot (2.6.6 + 6.4 + 4.6 + 2.4.4) \right] = \frac{476}{3.E.I}$$

- Montagem sistema linear com equação de compatibilidade :

$$(R) = (0) + X_1 \cdot (1) + X_2 \cdot (2) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_{1R} = \varphi_{10} + X_1 \cdot \varphi_{11} + X_2 \cdot \varphi_{12} \\ \delta_{2R} = \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{2120}{3.E.I} + \frac{13}{3.E.I} \cdot X_1 - \frac{59}{3.E.I} \cdot X_2 \\ 0 = -\frac{14560}{3.E.I} - \frac{59}{3.E.I} \cdot X_1 + \frac{476}{3.E.I} \cdot X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2120 = 13 \cdot X_1 - 59 \cdot X_2 \\ 14560 = -59 \cdot X_1 + 476 \cdot X_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = -55,441 \\ X_2 = +23,716 \end{cases}$$

∴ podemos assim afirmar que o momento reativo no engaste (1) assume o valor  $X_1 \cdot 1,0$  kN.m , ou seja, vale 55,44 kN.m , sendo que o sinal negativo indica que o momento assume sentido contrário ao escolhido na proposição dos casos ; e a reação horizontal no apoio (2) assume o valor  $X_2 \cdot 1,0$  kN, ou seja , vale 23,72 kN , o sinal positivo indica que a reação horizontal assume o sentido o escolhido na proposição dos casos .

▪ Cálculo das Reações de Apoio e Diagrama de Esforços Internos Solicitantes

$$R_{V1} = 70,00 - 55,441 \cdot 0,25 + 23,716 \cdot (-0,50) = 44,28 \text{ kN}$$

$$R_{H1} = 40,00 - 55,441 \cdot 0 + 23,716 \cdot (-1,00) = 16,28 \text{ kN}$$

$$R_{V2} = 50,00 - 55,441 \cdot (-0,25) + 23,716 \cdot 0,50 = 75,72 \text{ kN}$$

