➢ TEOREMA DE CASTIGLIANO

a) Cálculo da Flecha $\Rightarrow$ $$\delta = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx$$

Onde : δ – flecha

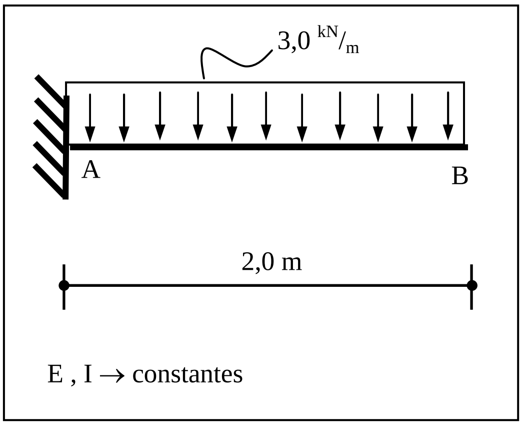
M_o – momento fletor devido ao carregamento externo

M_1 – momento fletor devido a uma carga unitária locada no ponto onde se deseja conhecer a flecha .

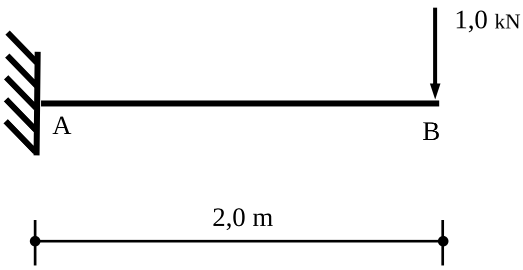
E – módulo de deformação / elasticidade longitudinal do material

I – momento de inércia da seção transversal

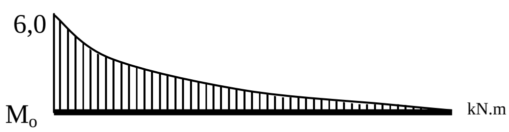
No exemplo abaixo , calcularemos a flecha no ponto B , conforme o esquema estático dado :

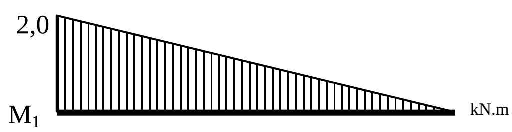


– viga auxiliar com carregamento unitário :



– diagramas de momento fletor M_o e M_1 :





– utilizando a tabela de Kurt Beyer para integral de duas funções :

$$\int M_o . M_1 . dx = \frac{s.i.k}{4} = \frac{2.6.2}{4} = 6$$

– cálculo de δ_B por Castigliano :

$$\delta_B = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} . \int M_o \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot 6 \qquad \therefore \delta_B = \frac{6}{E \cdot I}$$

b) Cálculo do Giro $\Rightarrow$ $$\varphi = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx$$

Onde : φ – giro

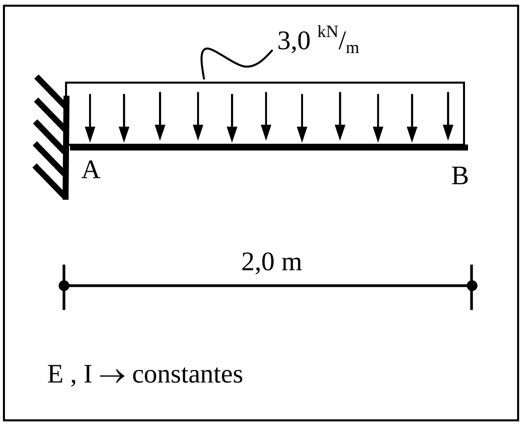
M_o – momento fletor devido ao carregamento externo

M_1 – momento fletor devido a um momento unitário locado no ponto onde se deseja conhecer o giro .

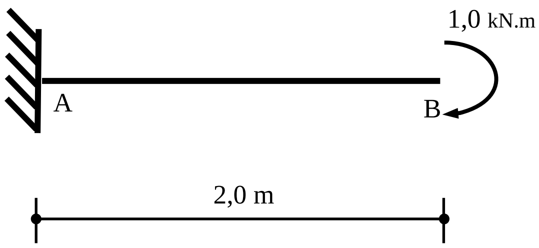
E – módulo de deformação / elasticidade longitudinal do material

I – momento de inércia da seção transversal

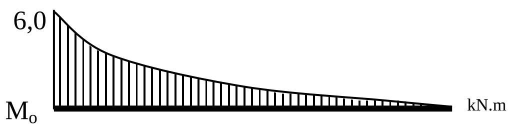
No exemplo abaixo , calcularemos o giro no ponto B , conforme o esquema estático dado :

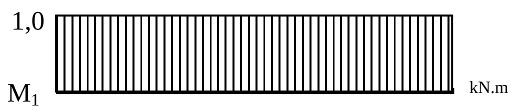


– viga auxiliar com carregamento unitário :



– diagramas de momento fletor M_o e M_1 :





– utilizando a tabela de Kurt Beyer para integral de duas funções :

$$\int M_o . M_1 . dx = \frac{s.i.k}{3} = \frac{2.6.1}{3} = 4$$

– cálculo de φ_B por Castigliano :

$$\varphi_B = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} . \int M_o \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot 4 \qquad \therefore \varphi_B = \frac{4}{E \cdot I}$$

c) Cálculo do Giro Relativo $\Rightarrow$ $\varphi_R = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx$

Onde : φ – giro relativo

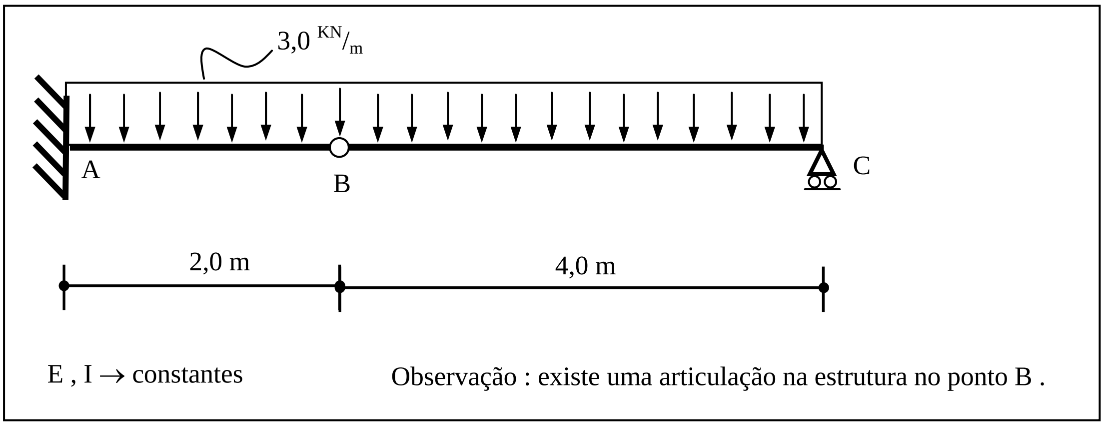
M_o – momento fletor devido ao carregamento externo

M_1 – momento fletor devido a momentos relativos unitários locados no ponto onde se deseja conhecer o giro relativo

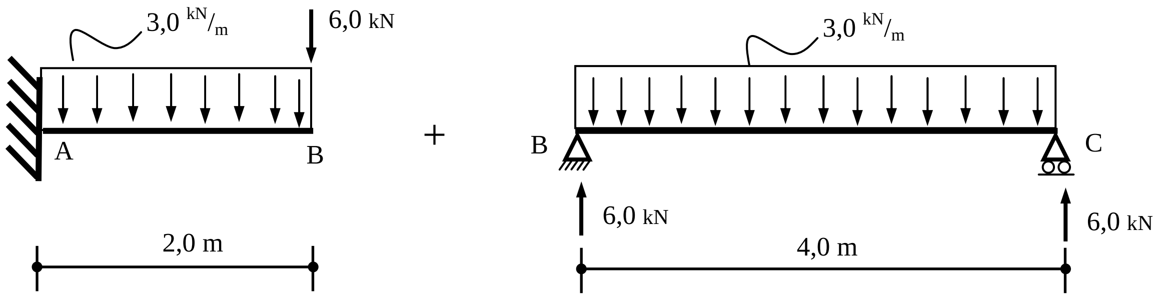
E – módulo de deformação / elasticidade longitudinal do material

I – momento de inércia da seção transversal

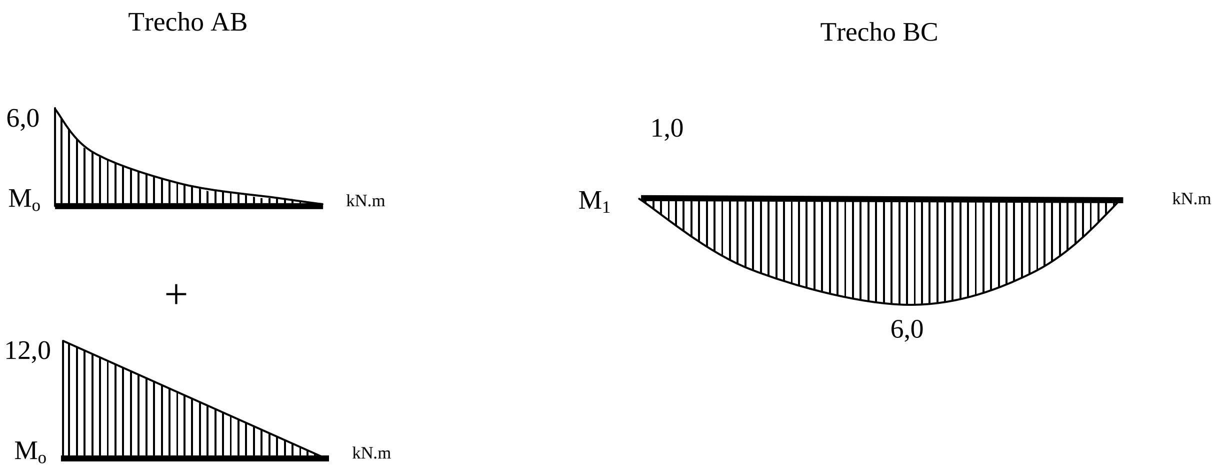
No exemplo abaixo , calcularemos o giro no ponto B , conforme o esquema estático dado :



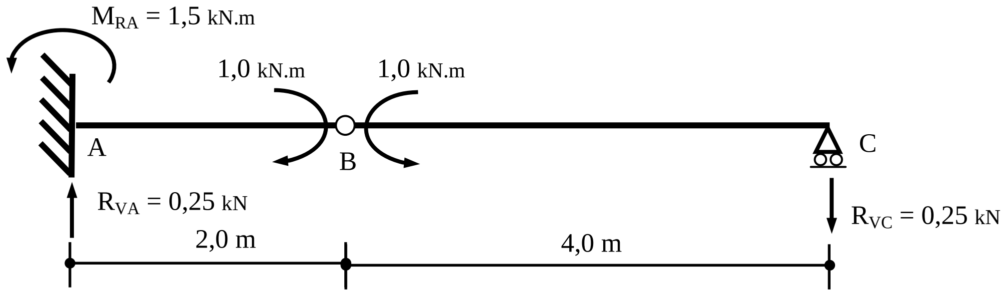
– cálculo reações na estrutura articulada :



– diagramas de momento fletor M_o :



– viga auxiliar com carregamento unitário :

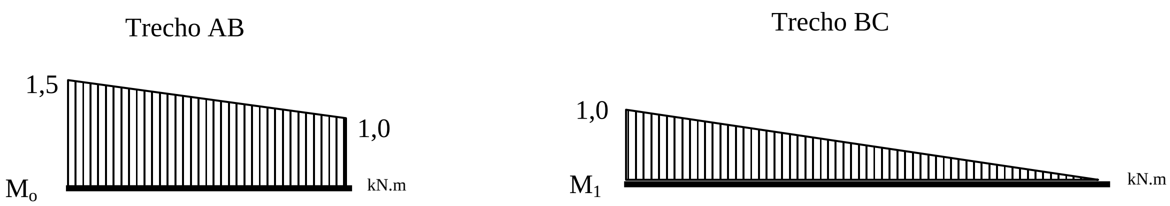


$$\sum M_{Bdir} = 0 \quad \Rightarrow \quad -1 + 4.R_{VC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{VC}} = 0{,}25\,\mathrm{KN}$$

$$\sum F_V = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{VA}} - R_{VC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{R}_{\mathrm{VA}} = 0{,}25\,\mathrm{KN}$$

$$\sum M_{Besq} = 0 \quad \Rightarrow \quad +1 + 2.R_{VC} - M_{RA} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{M}_{\mathrm{RA}} = 1 + 0{,}5 = 1{,}5\,\mathrm{KN.m}$$

– diagramas de momento fletor M_1 :



– utilizando a tabela de Kurt Beyer para integral de duas funções :

trecho AB :

$$\int M_o.M_1.dx = \frac{s.i.(3.k_1 + k_2)}{12} + \frac{s.i.(2.k_1 + k_2)}{6} = \frac{2.6.(3.1{,}5 + 1)}{12} + \frac{2.12.(2.1{,}5 + 1)}{6} = 21{,}5$$

trecho BC :

$$\int M_o.M_1.dx = -\frac{s.i.k}{3} = -\frac{4.6.1}{3} = -8$$

– cálculo de φ_{RB} por Castigliano :

$$\varphi_{RB} = \int \frac{M_o \cdot M_1}{E \cdot I} \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I}.\int M_o \cdot M_1 \cdot dx = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (21{,}5 - 8) \qquad \therefore \varphi_{RB} = \frac{13{,}5}{E \cdot I}$$

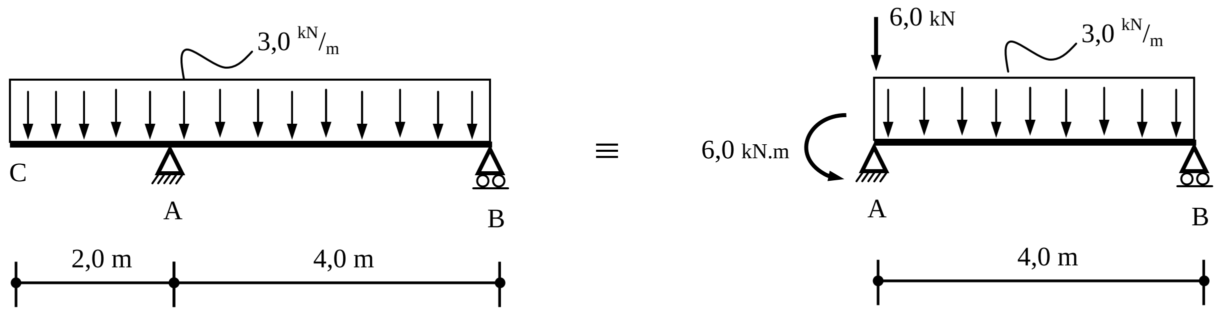
∗ Observação : nos exercícios acima são utilizadas as seguintes tabelas :

TABELA 01 – Integral de duas funções (Kurt Beyer)

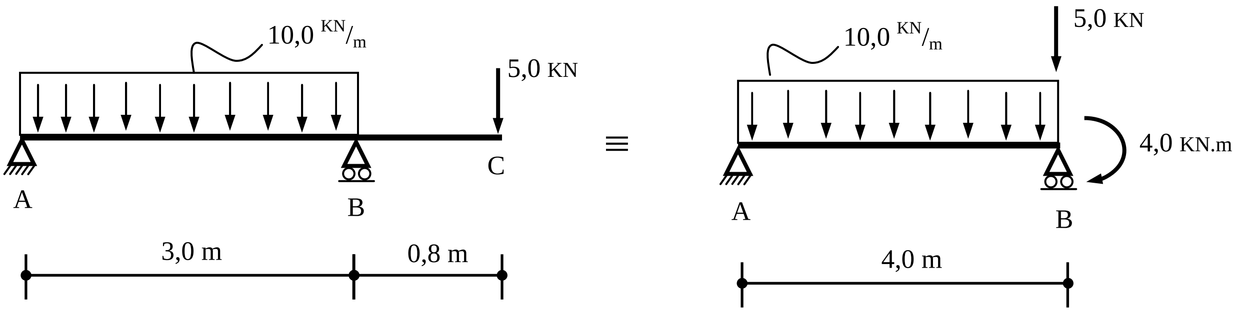
TABELA 02 e 03 – Reações e Momentos para vigas bi-apoiadas isostáticas simples

➢ Diagrama de carga modificado

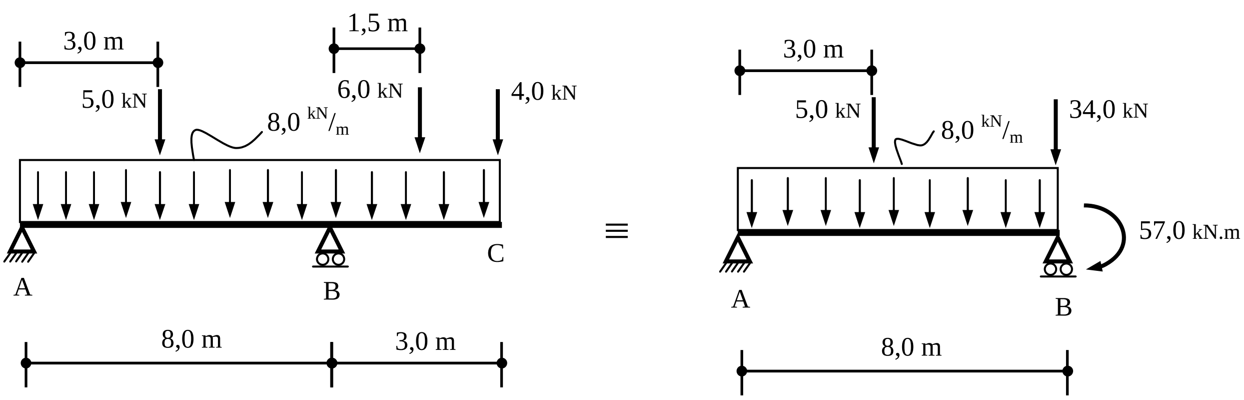
Em algumas situações, dentro do método dos esforços, será interessante a utilização do diagrama de carga modificado na resolução do exercício, de modo a transformar trechos em balanço por um conjugado formado por uma carga e um momento que represente o trecho , tal qual vemos nos exemplos abaixo :



$$F_C = q.\ell_b = 3,0.2,0 = 6,0 \text{ kN} \quad - \quad M_C = q.\ell_b.\frac{\ell_b}{2} = 3,0.2,0.\frac{2,0}{2} = 6,0 \text{ kN.m}$$



$$F_C = F = 5,0 \text{ kN} \quad - \quad M_C = F.\ell_b = 5,0.0,8 = 4,0 \text{ kN.m}$$



$$F_C = F_1 + F_2 + q.\ell_b = 6,0 + 4,0 + 8,0.3,0 = 34,0 \text{ kN}$$

$$M_C = F_1.x + F_2.\ell_b + q.\ell_b.\frac{\ell_b}{2} = 6.1,5 + 4,0.3,0 + 8,0.3,0.\frac{3,0}{2} = 57,0 \text{ kN.m}$$